Etude et représentation graphique d'une fonction numérique

Niveau : 1ère Sciences Expérimentales

I. Tangentes et demi-tangentes à **d'une courbe représentative d'une fonction numérique**

- Si f est dérivable en un point a alors la courbe de f admet une tangente au point $A(a, f(a))$ d'équation réduite :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

- Si f est dérivable à droite en a alors la courbe de f admet une demi-tangente au point $A(a, f(a))$ d'équation réduite :

$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

- Si f est dérivable à gauche en a alors la courbe de f admet une demi-tangente à au point $A(a, f(a))$ d'équation réduite :

$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

-Si $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente (**horizontale**) parallèle à l'axe des abscisses (équation $y = f(a)$)

-Si Une des limites $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est infinie ($\pm\infty$) alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une **demi-tangente verticale** (parallèle à l'axe des ordonnées) d'équation $x = a$ définie par :

$$\operatorname*{Lim}_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \begin{cases} +\infty \ldots\ldots\ldots \ dirigée\ vers\ le\ haut\ \uparrow\curvearrowright \\ -\infty \ldots\ldots\ldots dirigée\ vers\ le\ bas\ \downarrow\hookrightarrow \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \begin{cases} -\infty \ldots\ldots\ldots dirigée\ vers\ le\ haut\ \curvearrowleft\uparrow \\ +\infty \ldots\ldots\ldots dirigée\ vers\ le\ bas\ \hookleftarrow\downarrow \end{cases}$$

Exercice d'application :

Soit la fonction numérique à variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -1 + \sqrt{x+1} & si\ x \geq -1 \\ f(x) = \dfrac{1}{x} & si\ x < -1 \end{cases}$$

1. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche au point -1

2. Interpréter les résultats obtenus graphiquement.

II. Branches infinies

Définition :

On dit qu'une courbe représentative C_fd'une fonction f admet une branche infinie si l'une au moins des coordonnées $x\ ou\ f(x)$ d'un point $M(x, f(x))$ de C_f tend vers l'infini.

Exemple :

Soit la fonction numérique à variable réelle $f\colon \longmapsto x^2 - \frac{1}{x(x-1)}$

Cette fonction est définie sur $D_f =]-\infty, 0[\cup]0; 1[\cup]1, +\infty[$

De plus les limites de f à droite et à gauche en 0 et en 1 sont infinies.

Donc la courbe représentative C_f admet 6 branches infinies.

1.Asymptotes :

a. Asymptote verticale

Définition :

Si $\lim\limits_{x\to a, a^{\pm}} f = \pm\infty$ *alors la droite d'équation x=a est appelée une asymptote* ***verticale*** *à la courbe de f (parallèle à l'axe des* ***ordonnées*** *y'y)*

Exercice d'application :

Déterminer les asymptotes verticales de la courbe de la fonction :

$$f\colon \longmapsto x^2 - \frac{1}{x(x-1)}$$

b. Asymptote horizontale

Définition :

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$), la droite d'équation $y = l$ est appelée une asymptote horizontale à la courbe C_f de f (parallèle à l'axe des abscisses) au voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$)

Exercice d'application :

Déterminer l'asymptote horizontale de la courbe de la fonction :

$$f : \longmapsto \frac{-2x^2}{x(x-1)}$$

c. Asymptote oblique

Définition :

La droite d'équation $y = ax + b$,($a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) est appelée une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ (resp en $-\infty$) si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$)

Exercice d'application :

Déterminer l'asymptote oblique (Δ) de la courbe de la fonction :

$$f : \longmapsto 2x - 3 + \frac{1}{x(x-1)}$$

Etudier la position relative de la courbe C_f par rapport à (Δ).

Remarque :

La droite d'équation $y = ax + b$,($a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ si et seulement si $f(x) = ax + b + g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Propriété :

La droite d'équation $y = ax + b$,($a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) est une asymptote oblique à la courbe de f en +∞ si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$

Exercice d'application :

Montrer que la courbe représentative de la fonction $f: \mapsto \sqrt{x^2 - 2x}$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, dont on déterminera l'équation réduite.

2. Directions asymptotiques

Définitions :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle x.

- *Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$,on dira que Cf admet une branche parabolique de direction l'axe des **ordonnées :** on dit aussi que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique pour Cf*
- *Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ on dira que l'axe des abscisses est une direction asymptotique pour Cf ou encore Cf admet une branche parabolique suivant l'axe des **abscisses***
- *Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) =$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, on dira que Cf admet une branche parabolique de direction la droite d'équation **y=ax***

Exercice d'application :

Etudier les branches infinies de la courbe de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \frac{x^4 - x + 1}{x^2 + 1}$
2. $f(x) = \sqrt{2x + 3}$
3. $f(x) = x + \sqrt{x}$

III. Concavité d'une courbe de fonction – Points d'inflexion d'une courbe

1.Définitions

Soit f une fonction *dérivable* sur un intervalle ouvert I et $A(x_0, f(x_0))$ un point de C_f.

- La courbe C_f est « convexe» ou a une concavité dirigée vers les ordonnées positives si et seulement si C_f est au-dessus de chacune de ses tangentes
- La courbe C_f est « concave » ou a une concavité dirigée vers les ordonnées négatives si et seulement si sa C_f est en dessous de chacune de ses tangentes.
- Le point $A(x_0, f(x_0))$ est dit un point d'inflexion de C_f signifie que la courbe C_f change de concavité en A, c.à.d. la tangente en A traverse C_f en A.

2.Théorème

Si f est une fonction *deux fois dérivable* sur un intervalle ouvert I alors :

- $\begin{pmatrix} C_f \text{ est convexe} \\ ou\ C_f\ a\ une\ concavité\ dirigée \\ vers\ les\ ordonnées\ positives \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\ \forall x \in I : f''(x) \geq 0\ )$

- $\begin{pmatrix} C_f \text{ est concave} \\ ou\ C_f\ a\ une\ concavité\ dirigée \\ vers\ les\ ordonnées\ négatives \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\ \forall x \in I : f''(x) \leq 0\ )$

- $\begin{pmatrix} \text{Le point } A(x_0, f(x_0)) \text{ est} \\ \text{un point d'inflexion de } C_f \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f'' \text{ s'annule en } x_0 \\ \text{et change de signe en } x_0 \end{pmatrix}$

Exercice d'application :

Etudier la concavité de la courbe de la fonction $f: \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$ et déterminer son point d'inflexion.

IV. Eléments de symétrie :

Théorèmes :

-Dans un repère orthogonal, La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de *Cf si* et seulement si :

$$\forall x \in D_f : \ 2a - x \in D_f \quad et \quad f(2a - x) = f(x)$$

ou encore :

$$\forall x \in D_f : a + x \in D_f, a - x \in D_f \ \ et \quad f(a + x) = f(a - x)$$

-Dans un repère *cartésien*, le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de *Cf si et seulement si :*

$$\forall x \in D_f : 2a - x \in D_f \ et \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$$

ou encore

$$\forall x \in D_f : a + x \in D_f, a - x \in D_f \ \ et \quad f(a + x) + f(a - x) = 2b$$

Exercice d'application :

1) Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de la courbe de la fonction $f : \longmapsto \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ dans un repère orthogonal.

2) Montrer que le point $I(-2; -3)$ est un centre de symétrie de de la courbe de la fonction $f : \longmapsto x - 1 + \frac{1}{x+2}$

V.Fonction périodique :

1.Définition :

On dit qu'une fonction numérique f est périodique s'il existe un réel $\mathrm{T} > 0$ tel que *:*

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} : x \in D_f \Leftrightarrow x + T \in D_f\right) et \ \left(\forall x \in D_f : f(x + T) = f(x)\right)$$

2.Interprétation graphique :

Propriété :

Soit f une fonction numérique est périodique de période T et C_0 sa courbe représentative sur *l'ensemble* $D_0 = [a, a+T[\cap D_f$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on désigne par C_n la courbe représentative *de* f sur *l'ensemble* $D_n = [a+nT, a+(n+1)T[\cap D_f$ *et on a :*

C_n est l'image de C_0 par la translation de vecteur $nT\vec{\imath}$, *et on a :*

$$Cf = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} C_n$$