ROTATIONS DU PLAN

Niveau : 1ère Sciences expérimentales

On se situe dans un **plan orienté**

Activités

1) Construire dans le plan trois points distincts Ω , M et N tels que :

$$\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \frac{\pi}{5} \ [mod\ 2\pi] \ , \Omega\mathrm{M} = 4 \text{ et } \Omega\mathrm{N} = 5$$

2) Construire les points $M' et\ N'$ sachant que :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \\ \Omega\mathrm{M} = \Omega\mathrm{M}' \end{cases}$$

$$et$$

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega N'}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \\ \Omega\mathrm{N} = \Omega\mathrm{N}' \end{cases}$$

3) Montrer que :

$$MN = M'N' \text{ et que } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{N}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{N}'}\right) \ [mod\ 2\pi]$$

4) Déterminer des mesures pour les angles orientés :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}}\right) \ ; \ \left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{M'N'}}}\right)$$

I. Définition d'une rotation dans un plan

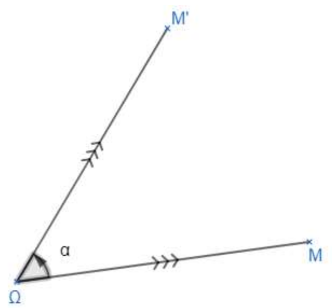
1.Définitions

- Une rotation de centre Ω et d'angle est une transformation r laissant le point Ω invariant et associe à tout point M différent de Ω le point M' défini par :

$$r(M) = M' \iff \begin{cases} \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \alpha \ [mod\ 2\pi] \\ \Omega \mathrm{M} = \Omega \mathrm{M}' \end{cases}$$

On note : $r = r(\Omega, \alpha)$.

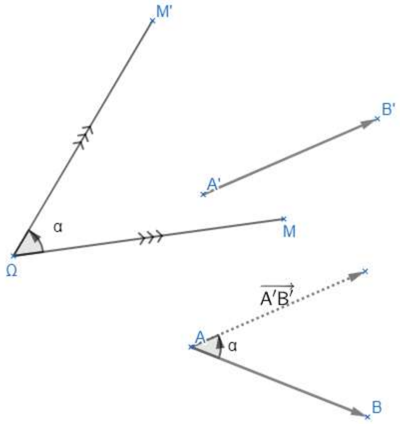
- La rotation $r = r(\Omega, -\alpha)$ est appelée la **rotation réciproque** de la rotation $r = r(\Omega, \alpha)$ et est notée $r^{-1} = r = r(\Omega, -\alpha)$



2. Propriété fondamentale d'une rotation :

Pour tous points distincts A, B d'images respectives A', B' par une rotation d'angle α, on a :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\right) \equiv \alpha \ [mod\ 2\pi]$$



Exercice d'application :

Construire un triangle équilatéral ABC direct. On considère la rotation r de centre A et de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) Quelle est l'image du point B par la rotation r ?

2) Déterminer l'image du triangle ABC par la rotation r et construire cette image.

II. Propriétés des rotations

Une rotation dans le plan **conserve** :

1. la mesure des **angles orientés :** c.à.d. pour tout trois points distincts A, B, C d'images respectives A', B', C' par la rotation $r = r(\Omega, \alpha)$ on a :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) \ [mod\ 2\pi]$$

2. la **distance :** c.à.d. pour tous points distincts A, B d'images respectives A', B' par la rotation $r = r(\Omega, \alpha)$ on a :$AB = A'B'$

3.le coefficient d'alignement de 3 points : c.à.d. pour tout trois points alignés A, B, C d'images respectives A', B', C' par la rotation $r = r(\Omega, \alpha)$ on a :

Les points A', B', C' sont alignés et si : $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{A'C'}$. ($k \in \mathbb{R}$)

4.le **barycentre** : c.à.d. pour tout trois points distincts A, B, G d'images respectives A', B', G' par la rotation $r = r(\Omega, \alpha)$ on a :

Si $G = bar\{(A, a), (B, b)\}$ alors $G' = bar\{(A', a), (B', b)\}$

En particulier une rotation dans le plan **conserve** Le parallélisme, et conserve l'orthogonalité.

III. Image par une rotation d'un segment, d'une droite et d'un cercle :

Propriétés :

Soient deux points A, B d'images respectives A', B' par une rotation $r = r(\Omega, \alpha)$ et R un nombre réel strictement positif.

- L'image d'un segment $[AB]$ par la rotation r est le segment $[A'B']$
- L'image d'une droite (AB) par la rotation r est droite $(A'B')$
- L'image d'un cercle de centre A et de rayon R par la rotation r est le cercle de centre A' et de rayon R .

Exercice d'application :

Soient ABCD un carré direct de centre O : $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$; et les points $I\ , J\ , K\ et\ L$ les milieux respectifs des segments $[AB]\ , [BC]\ , [CD]\ et\ [DA]$.

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Déterminer par la rotation r les images de points $A\ et\ B$, en déduire l'image du point I.

2) Déterminer par la rotation r l'image du points C, en déduire l'image de J.

3) Déterminer par la rotation r l'image du points D, en déduire l'image de K.

4) Montrer que $IJKL$ est un carré.