

Trigonométrie : Formules de transformation

Niveau : 1^{ère} Sciences expérimentales

Activités :

Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

On considère 2 points M et N du cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes respectives a et b . Faire une figure.

- 1) Déterminer les couples de coordonnées des points M et N
- 2) Exprimer analytiquement le produit scalaire $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$
- 3) Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$
- 4) Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ trigonométriquement.
- 5) Dédire l'expression : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- 6) Dédire les expressions de : $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\sin(a + b)$,

I. Formules d'addition

Propriétés :

Pour tous réels a et b on a :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Et si les nombres $a, b, a - b, a + b$ sont distincts de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ et de $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ pour tout

$k \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \text{ et } \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Exercice d'application :

En remarquant : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer les rapports trigonométriques du nombre $\frac{\pi}{12}$

II. Formules de duplication

Propriétés :

Pour tous réel a on a :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2\sin a \cdot \cos a$$

Et si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors :

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Exercice d'application :

En remarquant : $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, et en utilisant les 3 formules de duplication, calculer $\cos \frac{\pi}{8}$, $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{8}$

III. Transformation de produits en sommes

Propriétés :

Pour tous réels a et b on a :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} (\cos(a + b) - \cos(a - b))$$

Exercice d'application :

Linéariser le produit : $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x$

(Linéariser un produit de sin et cos : *le transformer en somme de sin ou de cos*)

VI. Transformation de sommes en produits

Propriétés :

Pour tous réels p et q on a :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

Exercice d'application :

Ecrire sous forme d'un produit :

$$\sin x + \sin(3x) ; \sin x - \sin(3x) ; \cos x + \cos(2x) ; \cos x - \cos(5x)$$

V. Transformation de $a \cos x + b \sin x$

Activité :

Vérifier que :

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

Propriété :

Soit a et b deux nombres réels non nuls.

Il existe un réel α tel que pour tout réel x on a :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \alpha)$$

ou

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \alpha)$$

Exercice d'application :

Ecrire $\cos x - \sin x$ sous les 2 formes $r\cos(x + \alpha)$ et $r\sin(x - \alpha)$

VI. Equation $a\cos x + b\sin x + c = 0$

Pour résoudre une telle équation il suffit de transformer l'expression $a\cos x + b\sin x$ en $r\cos(x - \alpha)$ ou en $r\sin(x + \alpha)$ et on se ramène à résoudre une équation de la forme $\cos X = \cos b$ ou $\sin X = \sin b$

Exercices d'application :

Résoudre dans les équations et les inéquations suivantes :

1) $x \in \mathbb{R} : \cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$

2) $x \in [0; 2\pi] : \cos x + \sqrt{3}\sin x > \sqrt{2}$

3) $x \in [-\pi, \pi] : \sqrt{3}\cos x - \sin x = -1$

4) $x \in [-\pi, \pi] : \sqrt{3}\cos x - \sin x \leq -1$

VII. Rappels :

1) Equations trigonométriques

Pour tous réels a et b on a :

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow (a = b + k2\pi \text{ ou } a = -b + k2\pi ; k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow (a = b + k2\pi \text{ ou } a = \pi - b + k2\pi ; k \in \mathbb{Z})$$

Et si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors :

$$\tan a = \tan b \Leftrightarrow (a = b + k\pi ; k \in \mathbb{Z})$$

Cas particuliers :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow (x = k\pi ; k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow (x = 2k\pi ; k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right)$$

2) Valeurs trigonométriques remarquables :

Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle en degré	0	30°	45°	60°	90°
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N'existe pas