Analytique du produit scalaire dans le plan

Etude analytique du cercle

Quelques lieux géométriques

Niveau : $1^{ère}$ Sciences Mathématiques

Rappels

- Pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls on a : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Et on a : $\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}.\vec{v} = 0$

- Aire d'un triangle ABC : $S = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin(\widehat{BAC})$

- Norme de $\vec{u}$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$

- Distance de 2 points A et B : $AB = \sqrt{\left(\overrightarrow{AB}\right)^2}$

Dans tous les paragraphes de cette leçon, on considérera que le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $(\boldsymbol{O};\vec{\boldsymbol{\imath}},\vec{\boldsymbol{\jmath}})$

I. EXPRESSION ANALYTIQUE DU. PRODUIT SCALAIRE

1.Propriété :

Pour tous vecteurs $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ on a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration :

$$\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})$$
$$= xx'\vec{\imath}.\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}.\vec{\jmath}$$
$$= xx'\|\vec{\imath}\|^2 + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\|\vec{\jmath}\|^2$$
$$= xx' + yy'$$

Car $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$, le repère étant normé,

Et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$, le repère étant orthogonal.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

On donne $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et $\vec{v}\left(3; -\frac{1}{2}\right)$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$. Que peut-on dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Exercice 2 :

Sachant que : $\vec{\imath}.\vec{u} = -2 \;\; et \; \vec{\jmath}.\vec{u} = 3$, quel est le couple de coordonnées du vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$?

Exercice 3 :

Déterminer les valeurs du paramètre réel m pour que les deux vecteurs $\vec{u}(m, -2 + m)$ et $\vec{v}(m - 4, m + 1)$ soient orthogonaux.

2.Norme d'un vecteur et distance de 2 points

Propriétés

► La norme d'un vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

► La distance entre deux points $A(x_A \,;\, y_A)$ et $B(x_B \,;\, y_B)$ est :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exercice d'application :

On considère les points $A(1,-3)$; $B(3,7)$ et $C(-3,1)$.

1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$, en déduire la nature du triangle ABC.

2) Calculer l'aire du triangle ABC.

3) Calculer $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|$

3.Expression analytique du cosinus et du sinus

Propriété :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls et θ une mesure de l'angle *orienté* $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

On a :

$$cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Et

$$sin\theta = \frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Conséquence :

Si ABC est un triangle, alors l'aire de ce triangle est :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|$$

Exercice :

On considère les points $A(5;0)$ et $B(2;1)$ et $C(6;3)$

1)Calculer $cos(\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA})$ et $sin(\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA})$

2) En déduire une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA}})$

3) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

II. <u>Équation de droite de vecteur normal donné</u>

<u>Rappel</u> :

Vecteur directeur $\vec{u}$ d'une droite (Δ).

$$(\Delta) = \left\{M \in (P);\ \overrightarrow{AM} = \lambda\,\vec{u}\,\right\}$$

Dans un repère cartésien du plan si (Δ) a pour équation cartésienne

$ax + by + c = 0$; alors $\vec{u}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de (Δ)

<u>1.Définition :</u>

On appelle **vecteur normal** à une droite (Δ), un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de (Δ)

<u>2. Propriétés :</u>

- Une droite (Δ) de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

- Réciproquement, la droite(Δ)d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n}(a\,;b)$ pour vecteur normal.

- Et on a : $(\Delta) = \left\{M \in (P);\ \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0\,\right\}$

<u>Démonstrations :</u>

- Soit un point A(x_A ; y_A) de la droite *d*.

M(x ; y) est un point de (Δ) si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont orthogonaux. Soit : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

Soit encore : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$ c.à.d. $ax + by - ax_A - by_A = 0$.

- Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de (Δ) alors $\vec{u}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de (Δ).

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifie : $-b \times a + a \times b = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

3. Distance d'un point par rapport à une droite.

Définition :

Soient (Δ) une droite et A un point dans le plan.

La distance du point A à la droite (Δ) est la distance AH où H est la projection orthogonale de A sur (Δ)

Théorème :

Soient la droite (Δ): $ax + by + c = 0$ et $A(x_A\,;\,y_A)$ un point dans le plan.

La distance du point A à la droite (Δ) est :

$$d\big(A, (\Delta)\big) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

II. Étude analytique du cercle :

Rappels

► Soit Ω un point du plan et r un nombre réel strictement positif.

Le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = r$.

On le note $C(\Omega, r)$

► Si $[AB]$ est un diamètre d'un cercle C, alors Pour tout point M de C distinct de $A\ et\ de\ B$ on a $(MA) \perp (MB)$

1.Equation d'un cercle :

Propriétés :

► Tout cercle $C(\Omega(a, b);\ r)$ du plan (P) a pour équation cartésienne :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

► L'équation cartésienne du cercle (***C***) de diamètre $[AB]$ est : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

c.à.d. $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

Exercices:

1) Montrer que l'équation du cercle C de centre $\Omega(3; -2)$ et de rayon $r = \sqrt{5}$ s'écrit :

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$$

2) Déterminer une équation du cercle *C* de centre $A(-1\ ;2)$ et passant par le point $B(2\ ;-2)$.

3) Ecrire une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

2. Représentation paramétrique d'un cercle :

Propriété :

$C(\Omega(a,b);r)$ est un cercle du plan (P) .

Pour tout point $M(x,y)$ du plan (P) , On a :

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases} ;\ \theta \in \mathbb{R}$$

Où $\theta \equiv (\widehat{\vec{\imath}\,;\,\overrightarrow{\Omega M}})$.

On l'appelle représentation paramétrique du cercle $C(\Omega(a,b);r)$.

Preuve :

Soit le cercle $C(\Omega(a,b);\ r)$ d'équation cartésienne :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

On a :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{r}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists\ \theta \in \mathbb{R} \Big/ \begin{cases} \dfrac{x-a}{r} = \cos\theta \\ \dfrac{y-b}{r} = \sin\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\ \theta \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$$

Exercice d'application :

Ecrire une équation cartésienne du cercle de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + \sqrt{2}\sin t \\ y = 2 + \sqrt{2}\cos t \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$

3. Etude de l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Propriété :

L'ensemble des points $M(x,y)$ du plan (P) vérifiant l'équation :

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

est :

► vide ssi $a^2+b^2-4c<0$

► formé par un seul point ssi $a^2+b^2-4c=0$

► un cercle ssi $a^2+b^2-4c>0$

Exercices d'application :

Déterminer l'ensemble (E) dans les cas suivants :

1) (E) : $x^2+y^2-20x-12y+123=0$

2) (E) : $x^2+y^2-x+3y+11=0$

3) (E) : $x^2+y^2+6x-8y+25=0$

4. Etude de la position relative d'un cercle et d'une droite :

1. Définition :

Soient (C) un cercle du centre Ω et de rayon r et M un point dans le plan (P)

► $\Omega M > r$ signifie que le point M est à l'extérieur du cercle (C)

► $\Omega M < r$ signifie que le point M est à l'intérieur du cercle (C)

Exercices d'application :

On considère le cercle (C) de centre $\Omega(10;6)$ et de rayon $r=\sqrt{13}$

Etudier la position relative du cercle (C) par rapport aux points :

$$A(7;4)\ ;\ \ B(6;6)\ \ et\ C(9;3)$$

2. Propriété :

Soient (C) un cercle du centre Ω $et\ de\ rayon\ r\ et$ (D) une droite dans le plan (P).

¬ $d(\Omega;\ (D))\ >\ r$ signifie que la droite (D) est à l'extérieur du cercle (C)

¬ $d(\Omega;\ (D))\ =\ r$ signifie que la droite (D) est à l'intérieur du cercle (C)

¬ $d(\Omega;\ (D))\ <\ r$ signifie que la droite (D) coupe le cercle (C) en deux points.

Exercices d'application :

On considère le cercle (C) de centre $\Omega(10; 6)$ et de rayon $r = \sqrt{13}$

1) Montrer que la droite (Δ_1): $x + y = 10$ ne coupe pas le cercle (C)

2) Montrer que la droite (Δ_2): $3x + 2y = 29$ coupe pas le cercle (C) en un seul point dont on déterminera le couple de coordonnées.

3) Montrer que la droite (Δ_3): $x = y$ coupe pas le cercle (C) en deux points distincts dont on déterminera les couples de coordonnées.

5. Équation d'une droite tangente à un cercle en un point donné de ce cercle :

Propriété :

Soient (C) un cercle du centre $\Omega(a, b)$ et $A(x_A\ ;\ y_A\ )\ \in\ (C)$.

On considère la tangente (T) du cercle (C) $en\ point\ A$. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ est normal à (T) et on a pour tout point M du plan (P) :

$$M \in (T) \Leftrightarrow\ \ \overrightarrow{\Omega A}\,.\,\overrightarrow{AM} = 0$$

Exercice d'application :

On considère les points $A(2\ ;\ 1)\ et\ B(-4\ ;\ -1)$.

1) Déterminer le centre et calculer le rayon de ce cercle.

2) Déterminer une équation du cercle C de diamètre $[AB]$.

3) Montrer que le point $I(-2\ ;\ 3)$ appartient à C.

4) Déterminer une équation de la tangente à C en A.

5) Faire une représentation graphique de tous ce qui précède.

III. Etude de quelques lieux géométriques : (En exercices)

Exercice 1 : Lieu géométrique des points M du plan tels que : $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AM} = k$

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point du plan (P), et k un nombre réel.

On considère l'ensemble :

$$(D_k) = \left\{M \in (P) / \vec{u}\,.\,\overrightarrow{AM} = k\right\}$$

1. Montrer que (D_0) est une droite à bien déterminer.
2. Soit B le point tel que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, et H le point de la droite (AB) tel que : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH} = k$

a. Sachant que $\|\vec{u}\| = 2$, construire le point H dans les cas : $k = 2$; $k = -4$

b. Montrer que : $\forall M \in (P) :\ M \in (D_k) \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{MH} = 0$, en déduire que (D_k) est une droite à bien déterminer.

c. Construire la droite (D_k) dans les cas : $k = 2$; $k = -4$ avec $\|\vec{u}\| = 2$

3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D_{-2}) sachant que $\vec{u}(3; -2)$ et $A(-1; 1)$ dans un repère orthonormé.

Exercice 2 : Lieu géométrique des points M du plan tels que : $\boldsymbol{MA^2 - MB^2 = k}$

On considère l'ensemble : $(\Delta_k) = \{M \in (P)/MA^2 - MB^2 = k\}$

Où k est un nombre réel, et $A\ et\ B$ sont 2 points distincts du plan (P)

1. Soit I le milieu su segment $[AB]$. Montrer que :

$$\forall M \in (P) :\ M \in (\Delta_k) \iff \overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{IM} = \frac{k}{2}$$

2. En utilisant les résultats de l'exercice 1, déterminer la nature de l'ensemble (Δ_k).

Exercice 3 : Lieu géométrique des points M du plan tels que : $\boldsymbol{\frac{MA}{MB} = k}$

On considère l'ensemble : $(C_k) = \left\{M \in (P)/\frac{MA}{MB} = k\right\}$

Où k est un nombre réel strictement positif, et $A\ et\ B$ sont 2 points distincts du plan (P)

1. Montrer que (C_1) est un cercle à bien déterminer.

2. On suppose que : $k \neq 1$.

a. Montrer que :

$$\forall M \in (P) :\ M \in (C_k) \iff \left(\overrightarrow{MA} + k\,\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} - k\,\overrightarrow{MB}\right) = 0$$

b. Soient G_1 le barycentre du système $\{(A, 1); (B, k)\}$ et G_2 le barycentre du système $\{(A, 1); (B, -k)\}$

Montrer que : $\forall M \in (P) :\ M \in (C_k) \iff \overrightarrow{MG_1}\,.\overrightarrow{MG_2} = 0$

c. Montrer que (C_k) est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$

d. Construire (C_2) dans le cas où $AB = 6$

Exercice 3 : Lieu géométrique des points M du plan tels que : $\boldsymbol{MA^2 + MB^2 = k}$

On considère l'ensemble : $(C_k) = \{M \in (P) / MA^2 + MB^2 = k\}$

Où k est un nombre réel strictement positif, et $A\ et\ B$ sont 2 points distincts du plan (P)

1. Soit I le milieu su segment $[AB]$. Montrer que :

$$\forall M \in (P) : \ MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

2. En déduire que : $\forall M \in (P) : \ M \in (C_k) \ \Leftrightarrow \ IM^2 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{2}AB^2\right)$

3. Déterminer la nature de l'ensemble (C_k) suivant les valeurs de k.

(3 cas à envisager : $k < \frac{1}{2}AB^2$; $k = \frac{1}{2}AB^2\ et\ k > \frac{1}{2}AB^2$)

Exercice 5 : Lieu géométrique des points M du plan tels que : $\boldsymbol{\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = k}$

On considère l'ensemble : $(C_k) = \left\{M \in (P) / \overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = k\right\}$

Où k est un nombre réel, et $A\ et\ B$ sont 2 points distincts du plan (P)

1. Déterminer la nature de (C_0)

2. Soit I le milieu su segment $[AB]$. Montrer que :

$$\forall M \in (P) : \overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = IM^2 - IA^2$$

2. En déduire que : $\forall M \in (P) : \ M \in (C_k) \ \Leftrightarrow \ IM^2 = k + IA^2$

3. Déterminer la nature de l'ensemble (C_k) suivant les valeurs de k.