Barycentre de n points ; $2 \leq n \leq 4$

Niveau : $1^{ère}$ Sciences Mathématiques

Activité 1 :

Une tige de poids négligeable est mobile autour d'un axe horizontal O. On accroche aux deux extrémités A et B distantes de 45 cm un poids de 1,50 N en A, un autre de 3,50 N en B. La tige est alors en équilibre. Trouver la position de O.

Activité2 :

Construire A *et* B deux points du plan tels que $AB = 5$.

1) Soit G le point du plan tel que $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ (Utiliser la relation de Chasles vu de A) ; puis construire le point G

2) Existe-t-il un point H tel que $3\overrightarrow{HA} + (-3)\overrightarrow{HB} = \vec{0}$

I. Point pondéré

Définition

On appelle point pondéré ou point massif le couple $(A; a)$ où A est un point du plan et a un réel.

II-Barycentre de 2 points pondérés

1. Définition

Soient a *et* b deux nombres réels non nuls.

On appelle G le barycentre des points pondérés $(A; a)$ *et* $(B; b)$ *avec* $a + b \neq 0$ le point défini par la relation $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

On écrit : $G = bar\{(A; a);\ (B; b)\}$

2.Position du barycentre de 2 points

Propriété

Si G le barycentre des points pondérés $(A; a)\ et\ (B; b)\ avec\ a\ +\ b \neq 0$; alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{BA}$$

Les points $A, B\ et\ G$ sont alignés. $(G \in (AB)$

Remarques

Dans le cas particulier où G est le barycentre des points pondérés $(A; a)\ et\ (B; b)$ où $a \neq 0$, alors G est le milieu du segment $[AB]$.on dit que G est l'isobarycentre de $A\ et\ B$.

3. homogénéité du barycentre

Propriété

Soient $A\ et\ B$ deux points du plan.

Soit G le barycentre des points pondérés $(A; a)\ et\ (B; b)\ avec\ a\ +\ b \neq 0$

Pour tout réel k non nul, G est encore le barycentre des points pondérés $(A; ka)\ et\ (B; kb)$.

Exercices d'application

1. Construire le barycentre des points $(A, 1); (B, 2)$ sachant que $AB\ =\ 6\ cm$.
2. Construire le barycentre des points $(A, 3); (B, -3)$ sachant que $AB\ =\ 8\ cm$.
3. Construire le barycentre des points $(A, 1); (B, -2)$ sachant que $AB\ =\ 4\ cm$.
4. Construire le barycentre des points $(M, -3); (N, -2)$ sachant que $MN\ =\ 10\ cm$.

4.Propriété caractéristique

Théorème

Soient $(A; a)\ et\ (B; b)$ deux points pondérés $avec\ a\ +\ b\ \neq\ 0$. On a :

$G = bar\{(A; a);\ (B; b)\}$ ⟺ (Pour tout point M du plan on a :

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}\ )$$

Exercice d'application :

1) Décrire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|5\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB}\right\| = 22$$

2) Décrire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|20\overrightarrow{MA} - 11\overrightarrow{MB}\right\|$$

5. Coordonnées du barycentre

Propriété

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Le barycentre de 2 points pondérés $(A; a)$ et $(B; b)$ $avec$ $a + b \neq 0$ est le point G tel que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a}{a+b}\,\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}$$

De couple de coordonnées :

$$(x_G\ ;\ y_G) = \left(\frac{a\,x_A + b\,x_B}{a+b}; \frac{a\,y_A + b\,y_B}{a+b}\right)$$

Exercice d'application :

On donne les point $A(1;\ 3)$ et $B(2;\ 1)$.

Déterminer ls coordonnées des point M, barycentre de $(A, -1)$ et $(B, 3)$ et N, barycentre de $(A, 2)$ et $(B, -1)$ puis placer les points A, B, M et N.

Réponses : $M\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ et $N(0; 5)$

III. Barycentre de 3 points

1. Définition

Soient A, B et C trois points du plan affectés des coefficients respectifs $a;\ b$ et c, avec $a + b + c \neq 0$

Le barycentre G des points pondérés $(A; a), (B; b)$ et $(C; c)$ est défini de manière analogue par la relation : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Si $a = b = c \neq 0$ le point G est appelé l'isobarycentre des trois points A, B et C

Exercice d'application :

Soient $A, B, C \; et \; D$ 4 points du plan tels que $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{BC}$

Montrer que D est le barycentre des 3 points $A, B \; et \; C$ munis de coefficients que l'on précisera.

2. Propriété caractéristique

Théorème

Soient $(A; a)$; $(B; b) \; et (C; c)$ trois points pondérés avec $a \; + \; b \; + c \neq \; 0$.

On a :

$G = bar\{(A; a); \; (B; b); (C; c)\}$ si et seulement si pour tout point M du plan on a :

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG} \;)$$

3.Position du barycentre de 3 points

Propriété

Si G le barycentre des points pondérés $(A \,; a) et \; (B \,; b) \; et \; (C \,; c) avec$ $a \; + \; b + c \neq 0$; alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{a}{a + b + c}\overrightarrow{AB} + \frac{a}{a + b + c}\overrightarrow{AC}$$

Exercice d'application :

Construire un triangle ABC .Soit $G = bar\{(A; 1); \; (B; -1); (C; 2) \}$

Ecrire $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB} \; et \; \overrightarrow{AC}$ puis construire G

4. Propriété d'associativité du barycentre

Soit G le barycentre des points pondérés $(A \,; a), (B \,; b) \; et \; (C \,; c)$ où $a \; + \; b \; + \; c \neq 0$.

Il existe alors au moins deux coefficients dont la somme est non nulle.

Prenons $a \; + \; b \neq 0$ par exemple.

Soit H le barycentre (dit partiel) de $(A; a) \; et \; (B; b)$.

G est alors le barycentre de $(H; a \; + \; b) \; et \; (C; c)$

Exercice d'application :

ABC est un triangle. Construire le barycentre G du système pondéré $\{(A;3);\ (B;-3);(C;1)\ \}$

5. Coordonnées du barycentre

Propriété

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Le barycentre de 2 points pondérés $(A;a)\ et\ (B;b)\ avec\ a\ +\ b \neq 0$ est le point G tel que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a}{a+b+c}\ \overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$$

De couple de coordonnées :

$$(x_G\ ;\ y_G)\ = \left(\frac{a\,x_A + b\,x_B + c\,x_C}{a+b};\frac{a\,y_A + b\,y_B + c\,y_C}{a+b}\right)$$

Exercice d'application :

1. Placer dans un repère les points $A(1{,}2);\ B(-\,3\,,4)\ et\ C(-\,2\,,5)$.

Soit G le barycentre des points pondérés $(A,3),(B,2)\ et\ (C,-\ 4)$.

2. Quelles sont les coordonnées de G ? Placer G.

3. La droite (BG) passe-t-elle par l'origine du repère ? (Justifier)

Réponse : $G(5;-6)$

IV. Barycentre de 4 points

Définition

Soient $A,B,C\ et\ D$ quatre points du plan ou de l'espace affectés des coefficients respectifs $a\ b,c\ et\ d$ avec $a+b+c+d \neq 0$

Le barycentre G des points pondérés $(A;a),(B;b);(C;c)et\ (D,d)$ est défini de manière analogue par $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} + d\overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Exercice d'application :

$ABCD$ est un quadrilatère convexe et G est le barycentre du système pondéré $\{(A1),(B,1),(C,3),(D,3)\}$. Construire le point G.