DENOMBREMENTS

Niveau : 1ère Sciences Mathématiques

I. Cardinal d'un ensemble fini :

1. Définition :

Si un ensemble E est fini, c'est-à-dire si ses éléments peuvent être listés par une suite finie, son **cardinal** est le nombre d'éléments de E. On le note $CardE$

En particulier, $Card\Phi = 0$

2. Propriétés :

Si $E\ et\ F$ sont 2 ensembles finis, alors :

- $CardE \cup F = CardE + CardF - CardE \cap F$
- Si $E \cap F = \Phi$, alors $CardE \cup F = CardE + CardF$
- Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des ensembles disjoints 2 à 2, ($n \geq 2$), alors :

$$Card\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{n} CardE_k$$

- Si $E \subset F$, alors $CardE \leq CardF$ et $CardC_F^E = CardF - CardE$
- Si $E\ et\ F$ ne sont pas vides, alors : $CardE \times F = CardE \times CardF$

Exercice d'application :

Dans une classe de 28 élèves sportifs, 20 pratiquent le football et 13 le rugby. Combien d'élèves de cette classe pratiquent ces deux sports à la fois ?

II. Principe fondamental du dénombrement :

Activité :

Une classe de 8 garçons et 12 filles. Il faut un garçon et une fille pour représenter la classe. Combien de possibilités de choix ?

Propriétés :

- Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des ensembles non vides, $(n \geq 2)$, alors :
$$Card(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = CardE_1 \times CardE_2 \times \dots \times CardE_n$$
- Si une opération globale peut se décomposer en k opérations élémentaires successives, ces dernières pouvant s'effectuer respectivement de $n_1, n_2, \dots, n_k$ manières, alors l'opération globale peut se faire de $n_1, \times n_2 \times \dots \times n_k$ manières différentes.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Combien de nombres de trois chiffres qu'on peut former, sachant que le chiffre des unités est choisi parmi 1 et 3, le chiffre des dizaines est choisi parmi 2 ;3 ;5 et le chiffre des centaines est choisis parmi 8 et 9 ?

Exercice 2 :

Il a 4 chemises et 3 cravates.

Utiliser un arbre de dénombrement pour déterminer le nombre de choix d'une chemise et une cravate le matin en s'habillant.

III. Nombre d'applications entre 2 ensembles finis :

Activité :

Déterminer et dénombrer les applications de l'ensemble $E = \{a, b\}$ vers l'ensemble $F = \{1; 2; 3\}$.

Utiliser un arbre de dénombrement.

1. Propriété :

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

Soit E un ensemble de cardinal n et F un ensemble de cardinal p.

Alors le nombre d'applications de E $dans$ F est : $(CardF)^{CardE} = p^n$

Preuve :

En utilisant le principe de dénombrement, une application est exactement déterminée par le choix des n images, et chaque image a p possibilités

Donc le nombre de ces applications est : $\underbrace{p \times p \times \ldots \times p}_{n\,fois} = p^n$

2. Arrangements avec répétition :

Définition et propriété :

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

Un arrangement sans répétition de n objets parmi p objets est une disposition (une liste ou un uplet) ordonnée avec répétition de n éléments choisis parmi p, où chaque élément peut figurer plusieurs fois.

Le nombre d'arrangements avec répétition de n objets, choisis parmi p objets est p^n

Exemple :

Le nombre de résultats possibles si l'on tire n boules successivement avec remise dans une urne contenant p boules est : p^n

Exercice d'application :

Déterminer le nombre de mots de cinq lettres, formés avec les 26 lettres de l'alphabet.

IV. Nombre d'injections ou de bijections :

Activité :

Déterminer et dénombrer les applications injectives de l'ensemble $E = \{a, b\}$ vers l'ensemble $F = \{1; 2; 3\}$.

Utiliser un arbre de dénombrement.

1. Propriété :

Soit n et p deux entiers naturels tels que : $1 \leq p \leq n$

Le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments, est :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \dots \times (n-p+1)}_{p\ facteurs}$$

2. Arrangements sans répétition :

Définition et propriété :

Soit $n\ et\ p$ deux entiers naturels tels que : $1 \leq p \leq n$

Un arrangement sans répétition de p objets parmi n objets est une disposition (liste ou uplet) ordonnée sans répétition de p éléments choisis parmi n, où chaque élément figure une seule fois

Le nombre d'arrangements sans répétition de p objets pris parmi est A_n^p.

Exemple :

Le nombre de résultats possibles si l'on tire p boules successivement sans remise dans une urne contenant n boules est : A_n^p

Remarque :

Dans un arrangement sans répétition de p objets parmi n, les éléments sont ordonnés et distincts 2 à 2.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Combien de mots fictifs de 3 lettres distinctes peut-on écrire avec les 26 lettres de l'alphabet ?

Exercice 2 :

Calculez le nombre de tiercés possibles lorsque 18 chevaux prennent le départ.

3. Permutations :

Activités :

Déterminer et dénombrer les bijections de $E = \{a, b, c\}$ vers l'ensemble $F = \{1; 2; 3\}$.

Définition et propriétés :

Soit n un entier naturel non nul.

- Le nombre de bijections d'un ensemble E à n éléments dans un ensemble F à n éléments est :

$$A_n^{n,} = \underbrace{n \times (n-1) \ldots \times 1}_{n\, facteurs}$$

Et est noté : $n!$, c.à.d. :

$$n! = \underbrace{n \times (n-1) \ldots \times 1}_{n\, facteurs}$$

- Etant donné un ensemble $E\ de\ n$ objets, on appelle permutations de n objets distincts tout arrangement sans répétition de n objets pris parmi n objets.
- Le nombre de permutations de n objets est : $n!$

Remarques :

On a aussi : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Par *convention* on pose : $0! = 1$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

De combien de manières différentes peut-on placer 5 personnes l'une à côté de l'autre sur une ligne droite ?

Exercice 2 :

Combien de nombres à 4 chiffres distincts 2 à 2 peut-on écrire sachant que ces 4 chiffres sont choisis parmi les chiffres de 1 à 6 ?

V. Combinaisons :

Activités :

Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$

1. Quel est le nombre d'arrangements sans répétition de 3 éléments pris parmi les éléments de E ?

2. Quel est le nombre de permutations de 3 éléments distincts 2 à 2 ?

3. En déduire le nombre de parties à 3 éléments de l'ensemble E

4. Déterminer ces parties.

1. Propriété et définition :

Soit n et p deux entiers naturels tels que : $1 \leq p \leq n$

Étant donné un ensemble E à n éléments.

On appelle combinaison de p éléments parmi n éléments toute partie de E à p éléments

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments est :

$$\frac{A_n^p}{p!}$$

Et est noté : C_n^p

C.à.d. on a :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

Et aussi :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Remarque :

Dans une combinaison de p éléments parmi n, les éléments sont distincts 2 à 2 et ne sont pas ordonnés.

Exemple :

Le nombre de résultats possibles si l'on tire p boules simultanément dans une urne contenante n boules est : C_n^p

2. Propriétés des nombres C_n^p :

Pour tous les entiers naturels p et n tels que : $1 \leq p \leq n$, on a :

- C_n^p est un entier naturel.
- $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$, $C_n^0 = 1$
- $C_n^{n-p} = C_n^p$
- $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

À partir d'un groupe de 5 femmes et de 7 hommes :

1. combien de comités différents composés de 2 femmes et de 3 hommes peut-on former ?

2. Qu'en est-il si 2 des hommes s'entendent mal et refusent de siéger simultanément au comité ?

Exercice 2 :

Un groupe de 12 personnes doit être partagé en 2 groupes de 6 personnes. Un groupe partira en Indes et l'autre en Australie.

Combien y a-t-il de manières d'organiser les voyages ?

Remarque :

Triangle de Pascal : présentation des C_n^p dans un tableau triangulaire

n \ k	$p-1$	p
n	C_n^{p-1} →	C_n^p ↓
$n+1$		C_{n+1}^p

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	$6=C_4^2$	$4=C_4^3$	1		
5	1	5	10	$10=C_5^3$	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

3. Formule du binôme de Newton :

Propriété et définition :

Pour tous les nombres réels et pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^{n-p} b^p$$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^{p} b^{n-p}$$

Les nombres C_n^p sont appelés des coefficients binomiaux.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Calculer le coefficient du terme x^5y^7 dans le développement de $(2x-y)^{12}$

Exercice 2 :

Développer $(a+b)^5$ en utilisant la formule de Pascal pour calculer explicitement les coefficients.

4. Cardinal de $\mathcal{P}(E)$:

Propriété :

Le nombre de parties d'un ensemble fini E est 2^{CardE}

Preuve :

Soit $n = CardE$.

- Si $E = \Phi$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\Phi\}$, donc $Card\ \mathcal{P}(E) = 1 = 2^0$
- Sinon, on a : $n \geq 1$, donc le nombre de parties de E est la somme des nombres de parties à $0; 1; 2; \ldots; n$ éléments c.à.d. la somme des C_n^p avec $0 \leq p \leq n$

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\ 1^{n-p} 1^p = (1+1)^n = 2^n$$