Dérivation d'une fonction numérique à une variable réelle

Niveau : Classe 1ère Sciences mathématiques

Activités :

Activité 1 :

On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$

1) vérifier que : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$.

On notera cette limite par $f'(1) et\ appelée\ nombre\ dérivé\ de\ f\ au\ point\ 1$.

2) Soient $A\ et\ M$ les points de la courbe C_f d'abscisses respectifs $1\ et\ 1+h$, avec $h \neq 0$

a) Tracer la courbe C_f et la droite (AM)

b) Que représente le nombre $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ pour la droite (AM) ?

c) Ecrire l'équation de la droite (T) qui passe par A et de coefficient directeur 2 et tracer (T) dans le même repère.

Activité 2 :

Soit la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{2}{x} & si\ x > 2 \\ f(x) = \sqrt{3-x} & si\ x < 2 \end{cases}$

1) Vérifier que : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\frac{1}{2}$.

On notera cette limite par $f'_d(2)$ et appelée nombre dérivé à droite de f au point 1.

2) Vérifier que : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\frac{1}{2}$.

On notera cette limite par $f'_d(2)$ et appelée nombre dérivé à droite de f au point 1.

3) En déduire l'existence et la valeur de la limite : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

I-Nombre dérivé, tangente

1. Définitions :

Soit f une fonction numérique à une variable réelle définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I

La fonction f est dérivable en a *signifie que* la limite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie (égale à un nombre réel). Ce nombre réel sera noté $f'(a)$ et appelé nombre dérivé de f en a. c.à.d.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ou encore en posant $h = x - a$,on a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

2-Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre a.

f est dérivable en a **si et seulement si** elle dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$

3- La fonction affine tangente à une fonction

Définition :

Soit f une fonction dérivable en a. La fonction définie par :

$$u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$$

est une ***approximation affine*** de f et est appelée fonction affine tangente en a de f.

On écrit si x est au voisinage de a : $f(x) \approx u(x)$

Exercice d'application :

On considère les fonctions $f: x \longmapsto x^2$; $g: x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $r: x \longmapsto \sqrt{x}$

1) Vérifier que $f'(1) = 2$, $g'(1) = -1$ et $r'(1) = \frac{1}{2}$

2) Ecrire les expressions des fonctions $u, v\ et\ w$ tangentes respectivement à $f, g\ et\ r$ au point 1.

3) En déduire u$(1+h)$,$v(1+h)\ et\ w(1+h)$ en fonctions de h.

4) En déduire pour h plus proche de zéro, une approximation de $(1+h)^2, \frac{1}{1+h}\ et\ \sqrt{1+h}$

5) En déduire une approximation des nombres : $0{,}999^2$,$\frac{1}{1{,}0001}\ et\ \sqrt{0{,}9996}$

6) Trouver de même une approximation de $(1+h)^3$

4. *INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.*

- Si f une fonction dérivable en a alors la courbe de f admet une tangente au point $A(a, f(a))$ d'équation réduite :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$f'(a)$ est le coefficient directeur de cette tangente.

- Si f une fonction dérivable à droite en a alors la courbe de f admet une demi-tangente au point $A(a, f(a))$ d'équation réduite :

$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

- Si f une fonction dérivable à gauche en a alors la courbe de f admet une demi-tangente à au point $A(a, f(a))$ d'équation réduite :

$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

II.Fonction dérivée

Activités

Calculer le nombre dérivé $f'(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ dans les cas suivants:

1) $f(x) = a$; a es tune constante réelle

2) $f(x) = x$

3) $f(x) = x^2$

4) $f(x) = x^3$

5) $f(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 \neq 0$

6) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 > 0$

7) $f(x) = sinx$

1. Dérivabilité sur un intervalle.

Définitions

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f , a et b deux éléments de D_f tels que :$a < b$ et I un intervalle ouvert inclus dans D_f.

- On dit que f est dérivable sur l'ouvert Isi elle est dérivable en tout point de I
- On dit que f est dérivable sur le semi-ouvert $[a, b[$ si elle est dérivable sur l'ouvert $]a, b[$ et dérivable à droite en a
- On dit que f est dérivable sur le fermé $[a, b]$ si elle est dérivable sur l'ouvert $]a, b[$ et dérivable à droite en a et à gauche en b

2. Définition

Si f est une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I, la fonction qui associe à x son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle **la fonction dérivée de la fonction f sur I** et se note par f'.

3.Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles.

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur **tout intervalle** inclus dans son domaine de définition
- Les fonctions $x \longmapsto sinx$,$x \longmapsto cosx$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto tanx$ est dérivable sur tout intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$
- La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

Et on a : (n étant un entier relatif non nul et a, b, k des nombres réels donnés)

Fonction $f : x \longmapsto f(x)$	Fonction dérivée $f' : x \longmapsto f'(x)$
k =constante	0
x	1
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

4. *OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES.*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I ; k , a, b des réels . On a :

- Les fonctions $u+v$, ku , uv , u^n $avec\ n \in \mathbb{N}^*$ sont dérivables sur I et on a :

$$[u(x)+v(x)]' = u'(x)+v'(x)$$
$$[ku(x)]' = ku'(x)$$
$$[uv]'(x) = u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$$
$$([\mathrm{u(x)}]^{\mathrm{n}})' = nu'(x)[\mathrm{u(x)}]^{\mathrm{n}-1}$$

- Si la fonction u ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{1}{u}$, $\frac{v}{u}$ $et\ u^n$, $avec\ n \in \mathbb{Z}^{-*}$ sont dérivables sur I et on a :

$$\left[\frac{1}{u}\right]'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$$
$$([\mathrm{u(x)}]^{\mathrm{n}})' = nu'(x)[\mathrm{u(x)}]^{\mathrm{n}-1}$$
$$\left[\frac{v}{u}\right]' = \frac{v'(x)u(x)-u'(x)v(x)}{[u(x)]^2}$$

- Si la fonction u est strictement positive sur I, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et on a :

$$\left[\sqrt{u}\right]'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

- J est un intervalle tel que $\forall x \in J: ax+b \in I$, alors la fonction $f: x \longmapsto u(ax+b)$ est dérivable sur I, et on a :

$$f'(x) = au'(ax+b)$$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Montrer que la fonction $f: x \longmapsto \frac{x^2-2x}{x+3}$ est dérivable sur les intervalles $]-\infty,-3[$ et $]-3,+\infty[$ et vérifier que :

$$f'(x) = \frac{x^2+6x-6}{(x+3)^2}$$

Exercice 2 :

Montrer que la fonction $f: x \longmapsto \sqrt{\frac{2}{x^3-1}}$ est dérivable sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et vérifier que :

$$f'(x) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{x^2}{(x^3-1)\sqrt{x^3-1}}$$

Exercice 3 :

Montrer que la fonction $f: x \longmapsto \sin(2x) - \cos(5x) + \tan(2x)$ est dérivable sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et calculer $f'x)$

III.Monotonie d'une fonction numérique

Activités :

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I

1. Si *f* est constante sur I, calculer $f'(x)$

2. On suppose que *f* est croissante sur I et l'on considère un élément x_0 de I

Montrer que $\forall x \in I: x \neq x_0 \Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

En déduire que pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$

Théorème :

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I

- Pour tout x de I , $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ *f* est constante sur I
- Pour tout x de I, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ *f* est croissante sur I
- Pour tout x de I, $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow$ *f* est décroissante sur I

Remarque :

Dans l'activité précédente on a prouvé seulement une implication, l'implication réciproque est admise pour ce niveau. (Sera démontrée en Terminale ScMaths)

IV. Extremums d'une fonction numérique

Activités :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. On suppose que f présente un minimum au point a.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, on a :

$x < a \Longrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ et $x > a \Longrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$

2. En déduire que $f'(a) = 0$

Propriétés :

Soit f une fonction **dérivable** sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- ✓ Si f admet un extremum relatif en a alors $f'(a) = 0$
- ✓ Si f' **s'annule** en a en **changeant de signe** à droite et à gauche de a alors f admet un extremum en a

Exercice d'application :

On considère la fonction numérique $f: x \longmapsto \left(x + \frac{1}{x}\right)^5$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

2) Etudier les limites de f aux bornes de D_f

3) Montrer que f est dérivable sur les intervalles de D_f et vérifier que :

$$\forall x \in D_f : f'(x) = \frac{x^2-1}{x}\left(\frac{x+1}{x}\right)^4$$

4) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ et étudier le signe de $f'(x)$, en déduire les variations de f

5) Dresser le tableau de variations de f

6) Déterminer les extrémums de f et préciser la nature de chacun d'eux.

V. Equation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

Activité :

Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2}\cos(3x) + 2\sin(3x)$

Calculer $f'(x) et\ f''(x)$ et vérifier que : $f''(x) + 3^2 f(x) = 0$

Théorème : (Admis)

L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ (1) ou ω est un réel fixé admet pour solutions, sur $\mathbb{R}$, la famille des fonctions définies par

$f(x) = A\ cos(\omega x) + B\ sin(\omega x)$ où $A\ et\ B$ sont des nombres réels arbitraires, et ce sont les seules solutions

Remarque :

On peut aussi mettre sous la forme : $f(x) = Acos(\omega x + \varphi)$

Exercice d'application :

1) Résoudre l'équation différentielle $4y'' + y = 0$

2) Trouver la solution f de cette équation sachant que sa courbe passe par le point $A(\pi, 1)$, et admet une tangente en ce point de vecteur directeur égal à -1.