

# EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre

Niveau : Bac Sciences expérimentales

## Activités :

Trouver toutes les fonctions numériques  $f$  à une variable réelle  $x$  dans chacune des conditions suivantes :

$$1) f'(x) = 0 \quad 2) f''(x) = 0 \quad 3) f'(x) = e^x - 1 + x$$

## 1. Définition :

Une **équation différentielle** d'ordre  $n$  d'inconnue  $y$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  est une relation où  $y$  est une fonction de  $x$  ; dont laquelle apparaît au moins une dérivée successive de  $y$  :

$$y', y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$$

## Exemples :

$$y + xy' = 0; y=0; y^{(3)} - 3xy' + 2y' = 0 ; y^2 = y' \dots$$

## 2. Equations différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre du type $y' = ay + b$

-L'équation différentielle  $y' = ay$  (1) ou  $a$  est un réel fixé admet pour solutions, sur  $\mathbb{R}$ , la famille des fonctions  $f_\lambda$  définies par :

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{ax} , \lambda \in \mathbb{R} \text{ et ce sont les seules.}$$

- L'équation différentielle  $y' = ay + b$  (2) ou  $a$  est un réel fixé admet pour solutions, sur  $\mathbb{R}$ , la famille des fonctions  $f_\lambda$  définies par :

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} , \lambda \in \mathbb{R} \text{ et ce sont les seules.}$$

## Exercices d'application :

1-Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(1) : 2y' + y \ln 2 = 0$$

$$(2) : 3y' - 4y - 2 = 0$$

2-Déterminer la solution  $f$  de (2) sachant que la courbe de  $f$  admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur égal à  $-1$

### 3. Equations différentielle linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre

#### Théorème (Admis)

On considère l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = 0; (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

Pour résoudre une telle équation on forme d'abord l'équation caractéristique  $ar^2 + br + c = 0$ . Soit  $\Delta = b^2 - 4ac$  son discriminant.

Trois cas peuvent se produire :

- cette équation admet deux solutions réelles distinctes ( $\Delta > 0$ )  $r_1$  et  $r_2$  alors les solutions sont les fonctions  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  et sont deux réels arbitraires.

- cette équation admet une solution double réelle :  $r_0$  ( $\Delta$  nul) alors les solutions sont les fonctions  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (\alpha x + \beta) e^{r_0 x}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  et sont deux réels arbitraires.

- cette équation admet deux solutions **complexes** conjuguées  $r_1$  et  $r_2$  ( $\Delta < 0$ ) c.à.d. :  $r_1 = p + iq; r_2 = \bar{r}_1$ ; avec  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$  ; alors les solutions sont les fonctions  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx),$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  et sont deux réels arbitraires.

**Cas particulier :**

Les solutions de l'équation différentielle  $y'' + \omega^2 y = 0$  avec  $\omega \in \mathbb{R}$  sont les fonctions  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \alpha \cos q x + \beta \sin q x ,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  et sont deux réels arbitraires.

**Remarque :**

Les solutions de l'équation différentielle  $y'' + \omega^2 y = 0$  avec  $\omega \in \mathbb{R}$  sont aussi les fonctions  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) , \text{ ou encore } f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$$

où  $A$  et  $\varphi$  et sont deux réels arbitraires.

**Exercices d'application :**

*1-Résoudre les équations différentielles suivantes :*

(1) :  $2y'' - 3y' - 2y = 0$

(2) :  $3y'' + 2y' + y = 0$

(3) :  $y'' + 6y' + 9y = 0$

(4) :  $y'' + 16y = 0$

*2-Déterminer les fonctions :*

a)  $f$  solution de (1) telle que :  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = -1$

b)  $g$  solution de (2) telle que :  $g(0) = g'(0) = 1$