

# Etude et représentation graphique d'une fonction numérique

Niveau : 1<sup>ère</sup> Sciences Mathématiques

## I. Tangentes et demi-tangentes à d'une courbe représentative d'une fonction numérique

- Si  $f$  est dérivable en un point  $a$  alors la courbe de  $f$  admet une tangente au point  $A(a, f(a))$  d'équation réduite :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- Si  $f$  est dérivable à droite en  $a$  alors la courbe de  $f$  admet une demi-tangente au point  $A(a, f(a))$  d'équation réduite :

$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

- Si  $f$  est dérivable à gauche en  $a$  alors la courbe de  $f$  admet une demi-tangente à au point  $A(a, f(a))$  d'équation réduite :

$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

-Si  $f'(a) = \mathbf{0}$  alors la courbe de  $f$  admet au point  $A(a, f(a))$  une tangente (**horizontale**) parallèle à l'axe des abscisses (équation  $y = f(a)$  )

-Si Une des limites  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  est infinie ( $\pm\infty$ ) alors la courbe de  $f$  admet au point  $A(a, f(a))$  une **demi-tangente verticale** (parallèle à l'axe des ordonnées) d'équation  $x = a$  définie par :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{cases} +\infty \dots \dots \dots \text{dirigée vers le haut} \uparrow \curvearrowright \\ -\infty \dots \dots \dots \text{dirigée vers le bas} \downarrow \curvearrowleft \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{cases} -\infty \dots \dots \dots \text{dirigée vers le haut} \curvearrowright \uparrow \\ +\infty \dots \dots \dots \text{dirigée vers le bas} \curvearrowleft \downarrow \end{cases}$$



**Exercice d'application :**

Soit la fonction numérique à variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -1 + \sqrt{x + 1} & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

1. Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite et à gauche au point  $-1$
2. Interpréter les résultats obtenus graphiquement.

**II. Branches infinies**

**Définition :**

On dit qu'une courbe représentative  $C_f$  d'une fonction  $f$  admet une branche infinie si l'une au moins des coordonnées  $x$  ou  $f(x)$  d'un point  $M(x, f(x))$  de  $C_f$  tend vers l'infini.

**Exemple :**

Soit la fonction numérique à variable réelle  $f: \mapsto x^2 - \frac{1}{x(x-1)}$

Cette fonction est définie sur  $D_f = ]-\infty, 0[ \cup ]0; 1[ \cup ]1, +\infty[$

De plus les limites de  $f$  à droite et à gauche en 0 et en 1 sont infinies.

Donc la courbe représentative  $C_f$  admet 6 branches infinies.

**1. Asymptotes :**

**a. Asymptote verticale**

**Définition :**

Si  $\lim_{x \rightarrow a, a^\pm} f = \pm\infty$  alors la droite d'équation  $x=a$  est appelée une asymptote **verticale** à la courbe de  $f$  (parallèle à l'axe des **ordonnées**  $y'y$ )

**Exercice d'application :**

Déterminer les asymptotes verticales de la courbe de la fonction :

$$f: \mapsto x^2 - \frac{1}{x(x-1)}$$

### **b. Asymptote horizontale**

#### **Définition :**

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ ), la droite d'équation  $y = l$  est appelée une asymptote horizontale à la courbe  $C_f$  de  $f$  (parallèle à l'axe des abscisses) au voisinage de  $+\infty$  (resp. de  $-\infty$ )

#### **Exercice d'application :**

Déterminer l'asymptote horizontale de la courbe de la fonction :

$$f: \mapsto \frac{-2x^2}{x(x-1)}$$

### **c. Asymptote oblique**

#### **Définition :**

La droite d'équation  $y = ax + b$ , ( $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ ) est appelée une asymptote oblique à la courbe de  $f$  en  $+\infty$  (resp en  $-\infty$ ) si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ )

#### **Exercice d'application :**

Déterminer l'asymptote oblique ( $\Delta$ ) de la courbe de la fonction :

$$f: \mapsto 1 - 2x + \frac{1}{x^3 - x}$$

Etudier la position relative de la courbe  $C_f$  par rapport à ( $\Delta$ ).

#### **Remarque :**

La droite d'équation  $y = ax + b$ , ( $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ ) est une asymptote oblique à la courbe de  $f$  en  $+\infty$  si et seulement si  $f(x) = ax + b + g(x)$  avec

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

### Propriété :

La droite d'équation  $y = ax + b$ , ( $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ ) est une asymptote oblique à la courbe de  $f$  en  $+\infty$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$

### Exercice d'application :

Montrer que la courbe représentative de la fonction  $f: \mapsto \sqrt{x^2 - 2x}$  admet une asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$ , dont on déterminera l'équation réduite.

## 2. Directions asymptotiques

### Définitions :

Soit  $f$  une fonction numérique d'une variable réelle  $x$ .

- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ , on dira que  $C_f$  admet une branche parabolique de direction l'axe des **ordonnées** : on dit aussi que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique pour  $C_f$
- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  on dira que l'axe des abscisses est une direction asymptotique pour  $C_f$  ou encore  $C_f$  admet une branche parabolique suivant l'axe des **abscisses**
- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$  avec  $a \in \mathbb{R}^*$ , on dira que  $C_f$  admet une branche parabolique de direction la droite d'équation  **$y=ax$**

### Exercice d'application :

Etudier les branches infinies de la courbe de la fonction  $f$  dans les cas suivants :

1.  $f(x) = \frac{x^4 - x + 1}{x^2 + 1}$

$$2. f(x) = \sqrt{2x + 3}$$

$$3. f(x) = x + \sqrt{x}$$

### III. Concavité d'une courbe de fonction – Points d'inflexion d'une courbe

#### 1. Définitions

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $A(x_0, f(x_0))$  un point de  $C_f$ .

- La courbe  $C_f$  est « convexe » ou a une concavité dirigée vers les ordonnées positives si et seulement si  $C_f$  est au-dessus de chacune de ses tangentes
- La courbe  $C_f$  est « concave » ou a une concavité dirigée vers les ordonnées négatives si et seulement si sa  $C_f$  est en dessous de chacune de ses tangentes.
- Le point  $A(x_0, f(x_0))$  est dit un point d'inflexion de  $C_f$  signifie que la courbe  $C_f$  change de concavité en A, c.à.d. la tangente en A traverse  $C_f$  en A.

#### 2. Théorème

Si  $f$  est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  alors :

$$\diamond \left( \begin{array}{l} C_f \text{ est convexe} \\ \text{ou } C_f \text{ a une concavité dirigée} \\ \text{vers les ordonnées positives} \end{array} \right) \Leftrightarrow (\forall x \in I: f''(x) \geq 0)$$

$$\diamond \left( \begin{array}{l} C_f \text{ est concave} \\ \text{ou } C_f \text{ a une concavité dirigée} \\ \text{vers les ordonnées négatives} \end{array} \right) \Leftrightarrow (\forall x \in I: f''(x) \leq 0)$$

$$\diamond \left( \begin{array}{l} \text{Le point } A(x_0, f(x_0)) \text{ est} \\ \text{un point d'inflexion de } C_f \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} f'' \text{ s'annule en } x_0 \\ \text{et change de signe en } x_0 \end{array} \right)$$

### Exercice d'application :

Etudier la concavité de la courbe de la fonction  $f: \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$  et déterminer son point d'inflexion.

### IV. Eléments de symétrie :

#### Théorèmes :

- Dans un repère orthogonal, La droite d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie de  $C_f$  si et seulement si :

$$\forall x \in D_f: 2a - x \in D_f \text{ et } f(2a - x) = f(x)$$

ou encore :

$$\forall x \in D_f: a + x \in D_f, a - x \in D_f \text{ et } f(a + x) = f(a - x)$$

- Dans un repère cartésien, le point  $\Omega(a, b)$  est un centre de symétrie de  $C_f$  si et seulement si :

$$\forall x \in D_f: 2a - x \in D_f \text{ et } f(2a - x) = 2b - f(x)$$

ou encore

$$\forall x \in D_f: a + x \in D_f, a - x \in D_f \text{ et } f(a + x) + f(a - x) = 2b$$

### Exercice d'application :

1) Montrer que la droite d'équation  $x = -1$  est un axe de symétrie de la courbe de la fonction  $f: \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 3}$  dans un repère orthogonal.

2) Montrer que le point  $I(-2; -3)$  est un centre de symétrie de la courbe de la fonction  $f: \mapsto x - 1 + \frac{1}{x+2}$

## V. Fonction périodique :

### 1. Définition :

On dit qu'une fonction numérique  $f$  est périodique s'il existe un réel  $T > 0$  tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}: x \in D_f \Leftrightarrow x + T \in D_f) \text{ et } (\forall x \in D_f: f(x + T) = f(x))$$

### 2. Interprétation graphique :

#### Propriété :

Soit  $f$  une fonction numérique est périodique de période  $T$  et  $C_0$  sa courbe représentative sur l'ensemble  $D_0 = [a, a + T[ \cap D_f$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on désigne par  $C_n$  la courbe représentative de  $f$  sur l'ensemble  $D_n = [a + nT, a + (n + 1)T[ \cap D_f$  et on a :

$C_n$  est l'image de  $C_0$  par la translation de vecteur  $nT\vec{i}$ , et on a :

$$Cf = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} C_n$$