Fonctions exponentielles

Niveau :Bac Sciences Expérimentales

I. Fonction exponentielle népérienne

1-Définitions :

La fonction exponentielle népérienne est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. Elle est notée exp et définie par :

$$\begin{array}{rccc} exp: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & exp(x) = e^x \end{array}$$

2-Propriétés :

- La fonction $exp: x \longmapsto e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+*}$et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}: e^x = y \Leftrightarrow x = ln\, y$$

- La fonction exp est définie continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad e^x > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad ln\, e^x = x$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}: \quad e^{ln\, x} = x$

3-Propriétés algébriques :

Pour tous x, y de $\mathbb{R}$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad , \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad , \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad , \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

Exercices d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1) $e^{2x+1} \geq 1$

2) $3e^{2x} - e^x - 2 = 0$

4. Limites usuelles de la fonction exp: $x \mapsto e^x$

Propriétés :

On a les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad ,n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad ,n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a \quad ,a \in \mathbb{R}^*$

Exercices d'application :

Etudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + e^{-2x} - e^{3x})$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x + e^{-2x} - e^{3x})$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - e^x)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-x+1}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - 2x^2 - 2)\ e^x$

6) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{-x}-e^{3x}}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to1^-} e^{\frac{x}{x-1}}$

5-Dérivée de la fonction $exp: x \longmapsto e^x$ et conséquences

Propriétés :

-La fonction $exp: x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}: exp'(x) = e^x$$

-Si $u : x \mapsto u(x)$ est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors :

* la fonction $\varphi: x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I de dérivée :

$$\varphi'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

* Les primitives de la fonction $\psi: x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + \lambda$ où λ est une constante réelle.

Exercices d'application :

1) Montrer que la fonction $f: x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-e^x}}$ est dérivable sur son intervalle de définition et calculer sa dérivée.

2) Donner une primitive de la fonction numérique f sur l'intervalle I :

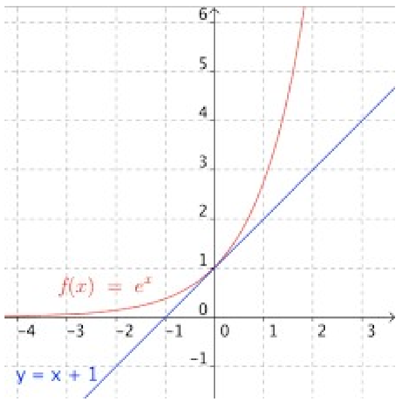
a) $f(x) = e^{-x} - e^x + e^{2x} - e^{\frac{x}{2}}, I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$,$I =]0, +\infty[$

c) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, $I = \mathbb{R}$

6. Représentation graphique de la fonction $exp: x \longmapsto e^x$

Dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction $exp: x \mapsto e^x$ est le symétrique de celle de la fonction $ln: x \mapsto ln\ (x)$ par rapport à la 1ère bissectrice du repère. (Droite d'équation $y = x$)



II. Fonction exponentielle de base a

Soit $a \in]0;+\infty[-\{1\}$

1.Définition et propriété :

La fonction exponentielle de base a est la bijection réciproque de la fonction $log_a : x \mapsto log_a = \frac{lnx}{lna}$

Elle est notée exp_a et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad exp_a(x) = a^x = e^{x\, ln}$$

N.B : $\forall x \in \mathbb{R}$: $1^x = 1$

2.Limites de a^x :

Comme $a^x = e^{x\ln a}$ alors :

Si $a > 1$ alors $lna > 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

Si $0 < a < 1$ alors $lna < 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$

3.Les 7 Formes indéterminées :

$$+\infty - (+\infty) \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \infty^0 \quad ; \quad 0^0 \quad ; \quad 1^\infty$$

4. Dérivée et monotonie de la fonction $exp_a : x \mapsto a^x$

Propriété :

- La fonction $exp_a : x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad exp'_a(x) = (\ln a)a^x$$

- La fonction $exp_a : x \mapsto a^x$ est :

  - strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$
  - et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $0 < a < 1$

Propriétés algébriques :

Pour tous réels a, b strictement positifs et pour tous réels x, y on a :

$$(ab)^x = a^x b^x \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad , \quad (a^x)^y = a^{xy}$$