Généralités sur les fonctions numériques

Activités :

Activité 1 :

Représenter graphiquement dans un repère cartésien :

1. La fonction linéaire : $f: x \longmapsto \frac{1}{2}x$

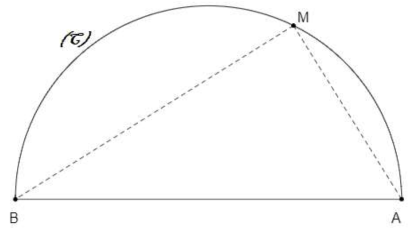
2. La fonction affine : $g: x \longmapsto -2x+3$

3. La fonction constante : $h: x \longmapsto \frac{3}{2}$

Activité 2 :

Soit M un point mobile sur un demi-cercle (C) de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 2$. (Voir figure ci-dessous)

On pose $AM = x \; et \; BM = f(x)$



1. Déterminer l'intervalle D dans lequel varie x.

2. Déterminer $f(0) et \; f(2)$

3. Peut-on calculer $f(3)$? Justifier votre réponse.

4. Montrer que : $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

I. Généralités :

1.Définition :

On définit une fonction numérique d'une variable x, comme une relation qui associe à chaque réel x au plus un réel noté $f(x)$ et appelé image de x par f. On note aussi : $f: x \longmapsto f(x)$

L'ensemble (ou domaine) de définition de f est l'ensemble des réels x admettant une image par f, on le note D_f et on écrit :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Exemples :

1. Si $f(x) = \sqrt{x}$, alors $D_f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$
2. Si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
3. Si f est une fonction polynôme, alors $D_f = \mathbb{R}$.

Exercice d'application :

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction numérique f à variable x dans les cas suivants :

1. $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{2x-3} + \frac{1}{|x|}$
2. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+2}$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{3-2x}}{x^2+2x}$
4. $f(x) = \frac{4-x}{x\sqrt{x+2}}$
5. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+3}-2}$
6. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2+1}$
7. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 5}$

2. Représentation graphique

Définition :

Le plan est muni d'un repère cartésien.

La représentation graphique (ou courbe représentative) d'une fonction numérique f à variable réelle x est l'ensemble des points du plan $M(x, y)$ tels que $x \in D_f$ *et* $y = f(x)$; on la note par C_f : et on écrit :

$$C_f = \{ M(x, f(x) / x \in D_f \}$$

3. Egalité de 2 fonctions numériques

Définition :

On dit que 2 fonctions numériques f et g à variable réelle x sont égales et on écrit $f = g$ si et seulement si $D_f = D_g = D$ et $\forall x \in D: f(x) = g(x)$.

Exercices d'application :

1. Soient $f: x \longmapsto \frac{\sqrt{x^3-1}}{x}$ et $g: x \longmapsto \sqrt{x - \frac{1}{x^2}}$

Montrer que $f = g$

2. Soient $f: x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$ et $g: x \longmapsto \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

A-t-on : $f = g$?

II. Parité d'une fonction

1. Définition :

Soit une fonction numérique f à variable réelle x.

- f est paire signifie que :

$$\forall x \in D_f: \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

- f est impaire signifie que :

$$\forall x \in D_f: \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Exemples :

- La fonction $x \longmapsto cosx$ est paire
- La fonction $x \longmapsto sinx$ est impaire
- La fonction $x \longmapsto tanx$ est impaire

2. Propriété :

Une fonction est paire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal. Elle est impaire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine dans un repère cartésien.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Etudier la parité des fonctions :

1. $f(x) = 3x^2 - |x| + \frac{x^4}{2} - 1$

2. $f(x) = |x+1| - |x-1|$

3. $f(x) = x - \frac{1}{x^3}$

4. $f(x) = \ x^2 - x$

Exercice 2 :

Soit f une fonction impaire définie sur $[-4; 4]$ et telle que :

$$\begin{cases} f(x) = -2x + 1 \; si \; 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = x - 5 \qquad si \; 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

1. Calculer $f(0), f(2) \; et \; f(4)$

2. Tracer la courbe de f dans un repère orthogonal.
3. Calculer $f(-1) \; et \; f(-3)$

4. Calculer $f(x)$ si $-2 \leq x \leq 0$

III. Variations d'une fonction numérique

Activités :

Soient $f: x \longmapsto 3 - 4x$, $g: x \longmapsto \frac{2x}{3} - 1 \; et \; (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$

Montrer que : $f(a) > f(b)$ et $g(a) < g(b)$

a. Définitions :

Soient fonction numérique f à variable réelle x et I un intervalle inclus dans D_f. On définit :

- La fonction f est strictement croissante sur I signifie que « f conserve l'ordre » sur cet intervalle, c.à.d. pour tout $(a, b) \in I^2$si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$

- La fonction f est strictement décroissante sur I signifie que « f inverse l'ordre » sur cet intervalle, c.à.d. : pour tout $(a,b) \in I^2$si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$
- La fonction f est croissante sur I signifie que pour tout $(a,b) \in I^2$ si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$
- la fonction f est décroissante sur I signifie que pour tout $(a,b) \in I^2$ si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$
- La fonction f est constante sur I signifie que pour tout $(a,b) \in I^2$: $f(a) = f(b)$
- La fonction f est monotone sur I signifie que f est croissante sur I ou bien que f est décroissante sur I

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Montrer que la fonction $p : x \longmapsto x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$

Exercice 2 :

Montrer que la fonction $h : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$

Exercice 3 :

Soit la fonction $f : \longmapsto 3 - \frac{1}{x-1}$.

Montrer que f est strictement croissante sur$I =]1; +\infty[$

Exercice 4 :

Soit la fonction $g : \longmapsto 2(x-1)^2 - 3$.

Montrer que g est strictement décroissante sur $I =]-\infty; 1]$

b. Taux d'accroissement :

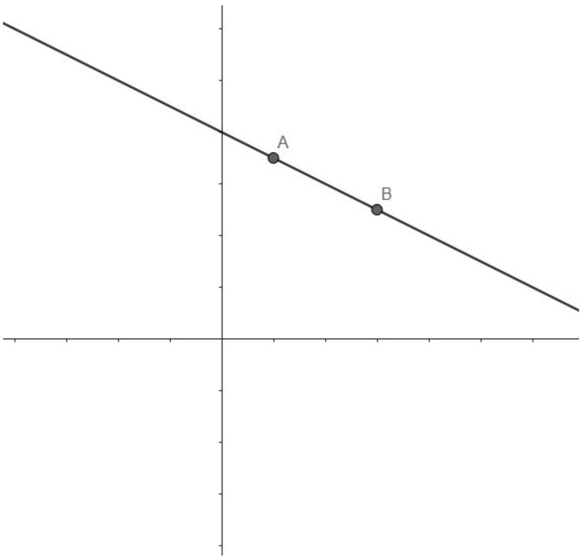
Activités :

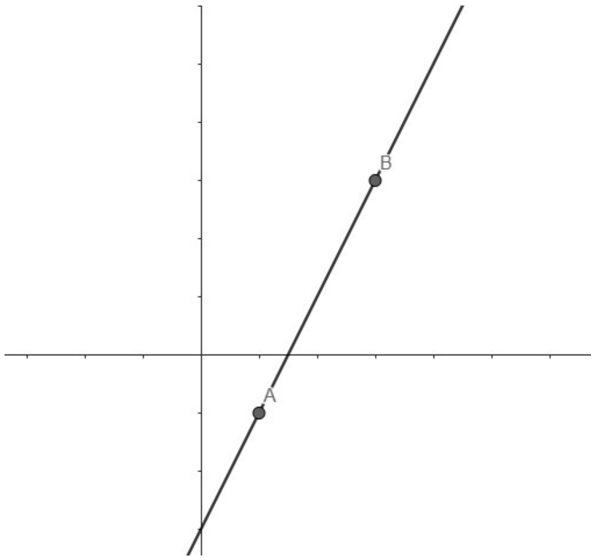
1. Soient $f : x \longmapsto 3 - 4x,\ et\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \neq b$

Sans calculs, préciser la valeur du rapport : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

2. Que représente ce rapport pour la droite (AB), où $A\ et\ B$ sont des points de C_f d'abscisses respectives $a\ et\ b$?

3. Préciser le signe de ce rapport dans les 2 cas suivants :





a. Définitions :

Soient fonction numérique f à variable réelle x et I un intervalle inclus dans D_f.

Si $(a, b) \in I^2 et\ a \neq b$ alors le nombre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est appelé le taux d'accroissement de f entre $a\ et\ b$.

c. Propriétés :

Soient fonction numérique f à variable réelle x et I un intervalle inclus dans D_f. On a :

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout$(a, b) \in I^2 tel\ que\ a \neq b$, on a : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout$(a, b) \in I^2 tel\ que\ a \neq b$, on a : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0$

d. Monotonie et parité

Propriété :

Soient fonction numérique f à variable réelle x telle que D_f soit symétrique par rapport à 0. et I un intervalle inclus dans D_f et dans $\mathbb{R}^+$ et I' l'intervalle tel que $I' = \{-x/x \in I\}$. On a :

- Si f est *impaire* et monotone sur I, alors f est monotone de même sens sur I' .
- Si f est *paire* et monotone sur I, alors f est monotone de sens contraire sur I' .

Exercice d'application :

Soient la fonction $f: x \longmapsto x^2 - 2x$, $et\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \neq b$

1.a. Montrer que : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = a + b - 2$

b. En déduire que f est croissante $[1, +\infty[$ sur et décroissante sur $]-\infty; 1]$

c. Dresser le tableau de variations de f.

3. Soit la fonction $g: x \longmapsto x^2 - 2|x|$

a. Montrer que g est paire.

b. Dresser le tableau de variations de g

IV. Extrémums d'une fonction numérique

Activités :

Soient $f: x \longmapsto x^2 - 2x$, $g: x \longmapsto -x^2 + x$

Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) \geq f(1)$ et $g(x) \leq g\left(\frac{1}{2}\right)$

Définition :

Soient fonction numérique f à variable réelle x et I un intervalle inclus dans D_f. On définit :

- f admet un maximum M (réel) en un point x_0 de I signifie que :

$$\begin{cases} M = f(x_0) \\ Pour\ tout\ x \in I: f(x) \geq f(x_0) \end{cases}$$

- f admet un minimum m (réel) en un point x_0 de I signifie que :

$$\begin{cases} m = f(x_0) \\ Pour\ tout\ x \in I: f(x) \leq f(x_0) \end{cases}$$

Remarque :

- Si f est croissante sur un intervalle $[a, b]$ et décroissante sur un intervalle $[b, c]$, alors $f(b)$ est un maximum de f sur $[a, c]$
- Si f est décroissante sur un intervalle $[a, b]$ et croissante sur un intervalle $[b, c]$, alors $f(b)$ est un minimum de f sur $[a, c]$

V. Fonctions périodiques

Activités :

1. Montrer que : $\cos\left(\frac{\pi}{5} - 2024\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{61\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{7}\right)$

2. Soit C_{cos} la courbe de la fonction $x \mapsto cosx$ dans un repère orthogonal. On prendra :

Sur l'axe (x'x) : 6 cm pour π unités

Sur l'axe (y'y) : 2 cm pour 1 unité

Construire les points de la courbe C_{cos} d'abscisses :

$$0\ ; \frac{\pi}{6}\ ; \frac{\pi}{4}\ ; \frac{\pi}{3}\ ; \frac{\pi}{2}\ ; \frac{2\pi}{3}\ ; \frac{3\pi}{4}\ ; \frac{5\pi}{6}\ ;\ \pi$$

Puis construire leurs symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. (Fonction paire)

3. Donner une allure de la partie de la courbe C_{cos} sur $[-\pi, \pi]$

a. Définition :

Dire que f est périodique et que le nombre $T > 0$ est une période de f, signifie que pour tout $x \in D_f$ on a : $x + T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$

b. Représentation graphique d'une fonction périodique

Propriété :

Le plan est rapporté à un repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Soient f une fonction périodique de période T et C_0 la partie de C_f sur un intervalle d'amplitude T : $[a, a+T[$.

On construit d'autres parties de C_f en translatant C_0 autant de fois que nécessaire (à droite et à gauche) suivant l'axe des abscisses.

(Vecteurs des translations : $kT\vec{\imath}\,, k \in \mathbb{Z}$)

4. *Représentations graphiques des fonctions $x \longmapsto cosx$ et $x \longmapsto sinx$*