# *Géométrie analytique de l'espace*

*Niveau : 1ère Sciences mathématiques*

## *I. Repère cartésien de l'espace*

### *1. Définition :*

Soient $\vec{i} = \overrightarrow{OI}, \vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ trois vecteurs non coplanaires, $O, I, J$ $et$ $K$ quatre points de l'espace non coplanaires.

Le quadruplet $\left(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ est appelé un repère cartésien d'origine $O$ de l'espace, et le triplet $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ est une base de l'espace.

On considère dans toute la suite de ce cours que l'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$

### *2. Propriété :*

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x, y, z)$ de nombres réels tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le triplet $(x, y, z)$ est appelé triplet des coordonnées du point $M$ et on écrit :$M(x, y, z)$ et $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ : $x$ $est$ $l'abscisse$, $y$ $est$ $l'ordonnée$ et $z$ $est$ $la$ $côte$.

## 3. Coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ , $\lambda.\vec{u}$ , $\overrightarrow{AB}$ et du milieu d'un segment

Propriétés :

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de l'espace et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix} \text{ et } \lambda.\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$$

- Si $A(x_A\,,y_A,z_A)$ et $B(x_B\,,y_B,z_B)$ sont 2 et $I$ est le milieu du segment $[AB]$ points de l'espace alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-\ y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix} \text{ et } I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

## *II. Condition analytique de colinéarité (coplanarité) de 2(3) vecteurs de l'espace*

### *1.Propriété :*

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si les 3 déterminants extraits de $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont nuls, c.à.d.

$$\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}=0 \text{ et } \begin{vmatrix}y & y'\\z & z'\end{vmatrix}=0 \text{ et } \begin{vmatrix}x & x'\\z & z'\end{vmatrix}=0$$

*Exercices d'application :*

1) Montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{8}\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\1\\-2\end{pmatrix}$ sont colinéaires

2) Montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-4\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires

3) Montrer que les points $A(-1;-1;1), B(2;5;10) et\ C(-3;-5;-5)$ sont alignés.

*2.Déterminant de 3 vecteurs :*

*Définition :*

Le déterminant de 3 vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ est le nombre réel :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x" \\ y & y' & y" \\ z & z' & z" \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} y' & y" \\ z' & z" \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x" \\ z' & z" \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x" \\ y' & z" \end{vmatrix}$$

*Théorème :*

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires, si et seulement s'il existe un couple de réels $(\alpha\,;\beta)$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$

*Exercices d'application :*

1) Montrer que les vecteurs $\vec{u}(4;2;4)$, $\vec{v}(1;0;2)$ et $\vec{w}(-2;-2;0)$ sont coplanaires

2) Montrer que les points $A(2;0;2)$, $B(1;-2;0)$, $C(1;-1;1)$ et $D(0;1;-1)$ ne sont pas coplanaires

*III. Analytique de la droite dans l'espace*

*1. Représentation paramétrique de la droite dans l'espace*

*Théorème et définition :*

La droite $(\Delta)$ passant par le point $A(x_A\,, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est

l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que :: $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$ c.à.d :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$

Ce système d'équations est appelé une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$ dans l'espace

*2. Deux équations cartésiennes d'une droite de l'espace*

*Propriétés :*

La droite $(\Delta)$ passant par le point $A(x_A\ , y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que :: $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires c.à.d :

$$\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} y - y_A & \beta \\ z - z_A & \gamma \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ z - z_A & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

Dans le cas où $\alpha\beta\gamma \neq 0$ ces équations s'écrivent : $\frac{x-x_A}{\alpha} = \frac{y-y_A}{\beta} = \frac{z-z_A}{\gamma}$

*Exercices d'application :*

Soit la droite $(\Delta)$ passant par les points $A(-1; 2; 3)$ et $B(1; 1; 1)$

1) Ecrire une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$

2) Ecrire de 2 façons distinctes 2 équations cartésiennes de la droite $(\Delta)$

*IV. Analytique du plan dans l'espace*

*1. .Représentation paramétrique du plan dans l'espace*

*Théorème et définition :*

Le plan $(P)$ passant par le point $A(x_A\ , y_A, z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que :: $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$ avec $(t, t') \in \mathbb{R}^2$ c.à.d :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_A + \beta t + \beta' t' \\ z = z_A + \gamma t + \gamma' t' \end{cases} ; (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

Ce système d'équations est appelé une représentation paramétrique du plan $(P)$ dans l'espace.

## *2. Equations cartésiennes d'un plan de l'espace*

*Théorème :*

Le plan $(P)$ passant par le point $A(x_A\ , y_A, z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que :les 3 vecteurs $\overrightarrow{AM}\ ;\ \vec{u}\ \ et\ \vec{v}$ soient coplanaires c.à.d. : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

L'équation cartésienne d'un plan $(P)$ de l'espace s'écrit sous la forme :

$ax + by + cz + d = 0$ où $a, b\ , c\ et\ d$ des nombres réels et $a, b\ et\ c$ non tous nuls.

## *3.Position relative de 2 plans :*

*Théorème :*

Soient les plans $(P): ax + by + cz + d = 0$ et $(P'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$

On a :

- $(P) et\ (P')$ sont parallèles ⇔ les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}a'\\ b'\\ c'\end{pmatrix}$ sont colinéaires
- $(P) et\ (P')$ sont sécants en une droite ⇔ les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}a'\\ b'\\ c'\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires