Limites d'une fonction numérique d'une variable réelle

Niveau : 1ère Sciences mathématiques

I. Limite finie ou infinie d'une fonction numérique en $+\infty$ ou en $-\infty$

Activités : Comportement à l'infini de quelques fonctions de référence

Fonction carré $f : x \longmapsto x^2$

- Représenter la fonction f graphiquement.

- Compléter le tableau ci-dessous :

x	-10^{50}	-10^{30}	-10^{10}	-10^{5}	10^{5}	10^{10}	10^{30}	10^{50}
$f(x)$								

Soit $A > 0$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > \sqrt{A} \implies f(x) > A \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} : x < -\sqrt{A} \implies f(x) > A$$

On dira que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, de même f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$

Fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{x} + 1$

- Représenter la fonction g graphiquement.

- Compléter le tableau ci-dessous :

x	-10^{50}	-10^{30}	-10^{10}	-10^{5}	10^{5}	10^{10}	10^{30}	10^{50}
$g(x)$								

Soit $\varepsilon > 0$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{\varepsilon} \implies |f(x) - 1| < \varepsilon \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} : x < -\frac{1}{\varepsilon} \implies |f(x) - 1| < \varepsilon\text{A}$$

On dira que f a pour limite 1 quand x tend vers $+\infty$, de même f a pour limite 1 quand x tend vers $-\infty$

1.Définition :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle $]a, +\infty[$ et l un nombre réel.

- On dit que f admet l comme limite lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f : x > B \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

On note alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

- On dit que f admet $+\infty$ comme limite lorsque x tend vers$+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f : x > B \implies f(x) > A$$

Et on note alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On définit de même :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \, ; \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \, ;$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

2.Limites des fonctions de référence

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \left| \begin{array}{l} +\infty \, ; \quad si\ n\ est\ pair \\ -\infty \, ; \ si\ n\ est\ impair \end{array} \right.$

Exercice d'application :

Déterminer : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{10}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^8$

II. Limite d'une fonction numérique en un point :

Activités : Comportement en un point de quelques fonctions usuelles

- Fonction carré :$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x^2}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|x| < 10^{-n} \Longrightarrow |f(x)| < 10^{-2n}$$

- Fonction inverse de la fonction carré $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{\frac{1}{x^2}}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|x| < 10^{-n} \Longrightarrow g(x) > 10^{+2n}$$

1.Définition :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle I^* ouvert pointé et centré en x_0 : $I^* =]x_0 - r, x_0 + r[\; avec \; r > 0$

-On dit que *f* admet $+\infty$ comme limite lorsque x tend vers x_0 si, pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs de *f* (*x*) pour *x* suffisamment proche de x_0 et on note : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

(On définit de même $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$)

- On dit que *f* admet l comme limite lorsque x tend vers x_0, si tout intervalle ouvert de centre l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de x_0 et on note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

2.Limites des fonctions de référence

Propriétés :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}\, n \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- Si $si\ n\ est\ pair$ alors $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et si $n\ est\ impair$ alors $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$
- Si f est une fonction polynôme alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Si f est une fonction rationnelle et $x_0 \in D_f$ alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- $\lim_{x\to x_0} cos(x) = sin(x_0)$
- $\lim_{x\to x_0} cos(x) = cos(x_0)$
- $\lim_{x\to x_0} |x| = |x_0|$
- Si $x_0 > 0$: $\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ et $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$
- Si $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k\epsilon\mathbb{Z}$ alors $\lim_{x\to x_0} tan(x) = tan(x_0)$

Exercice d'application :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^5} ;\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^5} ;\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6} ;\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+2}{x^2+x+1}$$

Théorème :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie au voisinage dex_0 et l un nombre réel. On a :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l\ et\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l\right)$$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Calculer la limite au point 1 de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x + 5 \,;si\ x > 1 \\ f(x) = \dfrac{x^3+2}{2-x} \qquad ;si\ x < 1 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Déterminer les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} E(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} E(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} E(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} E(x)$

III. Limites et ordre

1.Théorème

Soient $f\ et\ g$ deux fonctions numériques telles que : $\forall x \in I : f(x) \leq g(x)$

I est un intervalle convenable dans chaque cas.

- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$

α désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{9x^2+1} - 2x$

Montrer que pour tout réel positif x , $f(x) \geq x$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 2 :

Prouver que $\lim\limits_{x\to-\infty} (cosx - x^2 - 1) = -\infty$

Exercice 3 :

Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} E(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} E(x)$. (Utiliser l'encadrement de $E(x)$)

2.Théorème des gendarmes

Soient $f, g\ et\ h$ trois fonctions numériques définies sur un intervalle convenable I

- Si $\forall x \in I : g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = l \in \mathbb{R}$; alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$
- Si $\forall x \in I : |f(x) - l| \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$

α désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}^* : 1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$, en déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

b) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}^* : |f(x) - 1| \leq x^2$, en déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{sinx}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \left(xsin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x - 1\right)$

Exercice 3 :

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $x - x^2 < x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$

En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{x \to 0} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)$

IV. Opérations sur les limites

1.Les 7 formes indéterminées (F.I) : *On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.*

1ère F.I : $(+\infty) - (+\infty)$ ou $(-\infty) - (-\infty)$

2ème F.I : $\frac{0}{0}$

3ème F.I : $\frac{\infty}{\infty}$

4ème F.I : $0 \times \infty$

5ème F.I : 1^∞ (en classe de Bac)

6ème F.I : ∞^0 (en classe de Bac)

7ème F.I : 0^0 (en classe de Bac)

2.Théorèmes :

On considère deux fonctions numériques f et g à variable réelle x et deux nombres réels l et l'. α désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}\big(f(x)+g(x)\big) =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	l	$l \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	l'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha}\big(f(x)g(x)\big) =$	ll'	∞	∞	$F.I$

Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	l	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$l' \neq 0$	0 et $g(x) > 0$	0 et $g(x) < 0$	∞	l	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{l}{l'}$	∞	∞	0	∞	$F.I.$	$F.I$

Exercices d'application :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cosx}{x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{x^2-1}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2.\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^4}}$

8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x-1}-1}$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$; $n\in\mathbb{N}^*$

V. Limites en $\pm\infty$ d'une fonction polynôme ou rationnelle.

Activité :

On considère le polynôme $f(x)=-2x^3+3x^2-4x+5$

Ecrire $f(x)$ sous la forme $-2x^3g(x)$; en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

Théorème :

- La limite en $+\infty$ $ou\ en-\infty$ d'une fonction polynôme est la limite en $+\infty$ $ou\ en-\infty$ du son terme (monôme) de plus haut degré.

- La limite en $+\infty$ $ou\ en-\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite en $+\infty$ $ou\ en-\infty$ du rapport des termes (monômes) de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

Démonstration :

Soit f une fonction polynôme de degré $n\geq 1$. L'expression de f s'écrit :

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ avec $a_n\neq 0$

On peut écrire : $f(x)=a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)$

Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)=1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a_nx^n$

Exercices d'application :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3 - 3x^5 + x - 1)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-x}{x^5-3x^3-2}$

3) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{-2x^2}{(x^2-3)^2}$

VI. Limites de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{g(x)}$

Théorème :

Soient g fonction numérique définie sur un intervalle convenable I,telle que :

$\forall x \in I : g(x) \geq 0$

- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \sqrt{g(x)} = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = l \ et \ l \geq 0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \sqrt{g(x)} = -\infty$

α désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Exercices d'application :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x^2-4}{4x^2-1}}$

3) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x^2 - 2x - 2}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{2-x}}$

VII. Limites usuelles de fonctions trigonométriques

Activité :

1) En utilisant un cercle trigonométrique et en comparant des aires, montrer que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[-\{0\}: |sinx| < |x| < |tanx|$$

2) En déduire que : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[-\{0\}: cosx < \frac{sinx}{x} < \frac{1}{cosx}$

3) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$; en déduire $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tanx}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}$.

On rappelle que : $cosx = 1-2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Théorème :

On a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{tanx}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Exercices d'application :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{x} \; ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{tan5x}{sin2x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2} \; ; \; \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}$$