

Fonctions logarithmes

Niveau : Bac.Sciences expérimentales

Activités

Existe-t-il une fonction numérique f permettant de transformer les produits en sommes c.à.d. $f(x \times y) = f(x) + f(y)$?

Déterminer les nombres réels vérifiant :

$$10^a = 1000 ; 10^b = 0,000001; 10^c = 10^a \times 10^b ; 10^d = 1$$

$$2^x = 64 \quad ; \quad 2^y = \frac{1}{32} \quad ; \quad 2^z = 2^x \times 2^y \quad ; \quad 2^u = 1$$

Vérifier que $c = a + b$ et $z = x + y$

I- Fonction logarithme népérienne

1. Définition :

La fonction logarithme népérien (ou naturel) est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1. Elle est notée \ln . C.à.d.

$$\begin{array}{lcl} \ln: &]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto \ln(x) \end{array}$$

$$\text{Avec } \ln(1) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[: \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

2. Propriétés :

- ✓ La fonction $\ln: x \mapsto \ln(x)$ est définie continue et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et dérivée $\ln': x \mapsto \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$
- ✓ La fonction $\ln: x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et par suite on a les propriétés suivantes :

$$\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2: \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

Exercice d'application :

f est une fonction numérique à variable réelle x .

Déterminer l'ensemble de définition de f dans les cas suivants :

1) $f(x) = \ln(2x^2 - x - 1)$

2) $f(x) = \ln(|1 - x^2|)$

3) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$

4) $f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$

3. Signe de $\ln(x)$

Comme la fonction $\ln: x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $\ln 1 = 0$ alors pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a :

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

D'où le tableau de signes :

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	+	0	-

Exercices d'application :

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction numérique $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln(-x)}}$

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $\ln(3 - x) = \ln(x + 1)$

b) $\ln(x + 2) \geq 0$

4. Propriétés algébriques :

a. Propriété fondamentale de \ln

$$\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2: \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Démonstration : à faire par les élèves

On pose $a = x$ et on considère la fonction $f: x \mapsto \ln(bx) - \ln(x) - \ln(b)$

- 1) Vérifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée nulle.
- 2) En déduire que la fonction f est nulle puis conclure.

b. Autres propriétés (Conséquences) de \ln

Pour tous les nombres réels strictement positifs $a, b, a_1, a_2, \dots, a_n$ et pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre rationnel r on a :

$$\diamond \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\diamond \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\diamond \ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$$

$$\diamond \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

$$\diamond \ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln(a)$$

$$\diamond \ln(a^r) = r \cdot \ln(a)$$

Remarques :

Pour tous les nombres réels non nuls a, b on a :

$$\ln(|a \times b|) = \ln(|a|) + \ln(|b|)$$

En particulier si a et b sont strictement négatifs alors :

$$\ln(a \times b) = \ln(-a) + \ln(-b)$$

Exercices d'application :

1) Simplifier le plus possible :

$$A = \ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(\sqrt{2} - 1); \quad B = \ln 4 - 2 \ln\left(\frac{1}{32}\right) + 7 \ln \sqrt{2} - 6 \ln \sqrt[8]{8}$$

2) Résoudre dans \mathbb{R} les équations et les inéquations suivantes :

$$\text{a) } \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 2 \ln x - \ln(x+2)$$

$$\text{b) } 2 \ln(2x - 3) - 3 \ln(2 - x)$$

$$\text{c) } \ln(\sqrt{2x+1}) \leq -\frac{1}{2} \ln(x)$$

5. Limites de $\ln(x)$ aux bornes de $]0, +\infty[$

Propriétés :

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Exercice d'application :

Etudier les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2 x - \ln x)$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1 + \ln x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln|x - 1|$

6. Tableau de variation de \ln

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$		+	
\ln	$-\infty$	0	$+\infty$

7. Le nombre e

La fonction $\ln: x \mapsto \ln(x)$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} ; donc il existe un unique élément x de $]0, +\infty[$ tel que $\ln(x) = 1$.

Cet élément est noté e et vérifie alors :

$$e \in]0, +\infty[\text{ et } \ln e = 1$$

et on a :

$$\forall r \in \mathbb{Q} : r = \ln e^r$$

Et

$$\forall x > 0, \forall r \in \mathbb{Q} : r = \ln x \Leftrightarrow x = e^r$$

La bijection réciproque de la fonction $\ln: x \mapsto \ln(x)$ est appelée fonction exponentielle népérienne et notée :

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\rightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto \exp(x) = e^x \end{aligned}$$

N.B : Le nombre e n'est pas rationnel.

$$e \approx 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 \dots$$

Exercices d'application :

1) Calculer : $A = \ln\left(\frac{2}{e^2}\right) + 2\ln\sqrt[3]{e} - \ln(2e^3)$

2) Résoudre dans \mathbb{R} les équations et les inéquations suivantes :

a) $2\ln^2 x - \ln x - 3 = 0$

b) $\ln x - 5\sqrt{\ln x} + 4 = 0$

c) $\ln^2 x \geq \ln x$

d) $(\ln x)^3 - 8(\ln x)^2 - 105\ln x \geq 0$

3) Déterminer les ensembles de définition des fonctions numériques

a) $f: x \mapsto \sqrt{1 - \ln(x)}$

b) $g: x \mapsto \frac{\ln x}{\ln(x-1)}$

8. Limites usuelles de \ln

Activité 1 :

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$

Activité 2 :

Soit la fonction $g: x \mapsto \ln(x) - \sqrt{x}$

1) Etudier les variations de g sur $]0, +\infty[$

2) En déduire que $\forall x > 1: \ln(x) < \sqrt{x}$

3) En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ puis celle de $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

Propriétés :

On a les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0^- , r \in \mathbb{Q}^{*+}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0, r \in \mathbb{Q}^{*+}$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

Exercice d'application :

Etudier les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+x)}{x}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x) \ln x$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} |x-1| \ln|x-1|$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - x}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-2x)}{x}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$

9. Représentation graphique de la fonction $\ln: x \mapsto \ln(x)$

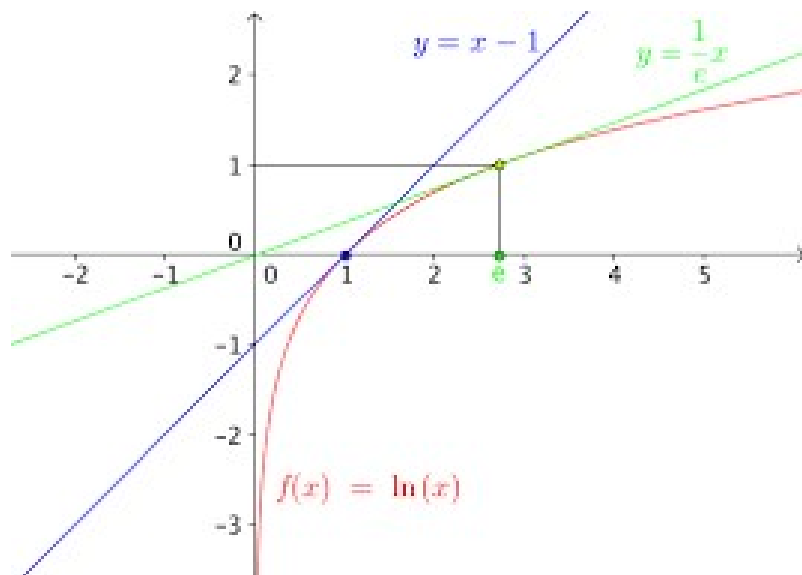
La courbe (C_{\ln}) de la fonction $\ln: x \mapsto \ln(x)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

De plus elle est concave en effet : $\forall x \in]0, +\infty[: \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

Equations des tangentes à (C_{\ln}) :

Au point $A(1; 0)$: $y = x - 1$

Au point $B(e; 1)$: $y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{1}{e}x$



10. Dérivée logarithmique :

Propriétés et définition :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , et ne s'annulant pas sur I , alors :

- La fonction $f: x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et sa dérivée est la dérivée logarithmique de u , c.à.d. : $f' = \frac{u'}{u}$
- Les primitives de la fonction $\frac{u'}{u}$ sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + \lambda$ où λ est une constante réelle.

Exercices d'application :

- 1) Montrer que la fonction $f: x \mapsto \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|$ est dérivable sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée et montrer qu'elle est monotone sur ces deux intervalles.
- 2) Donner une primitive de la fonction numérique f sur l'intervalle I :

$$a) f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x+1} - 1, I =]1, +\infty[$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x+1} - 1, I =]-\infty, -1[$$

$$c) f(x) = \frac{\ln x}{x}, I =]0, +\infty[$$

$$d) f(x) = \frac{x}{1+x^2}, I = \mathbb{R}$$

II. fonction logarithme de base a

Soit $a \in]0; +\infty[- \{1\}$

1. Définition :

- La fonction logarithme de base a est définie par :

$$\forall x \in]0; +\infty[: \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

- Si $a = 10$ la fonction \log_{10} est appelée fonction logarithme décimal et notée simplement \log :

$$\forall x \in]0; +\infty[: \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Remarques :

$$\log_a(1) = 0 ; \log 1 = 0$$

$$\log_a(a) = 1 ; \log 10 = 1$$

Pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in]0; +\infty[$ on a :

$$\log_a(a^r) = r ; \log 10^r = r$$

$$\log_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r$$

$$\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r$$

3. Limites de $\log_a(x)$

- Si $a > 1$, alors $\ln(a) > 0$ et on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$$

- Et si $0 < a < 1$ alors $\ln(a) < 0$ et on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$$

4. Dérivée et monotonie du logarithme de base a

Propriétés :

La fonction $\log_a: x \mapsto \log_a(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[: \log'_a(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

- Si $a > 1$, alors $\ln(a) > 0$ donc la fonction \log_a est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
- Et si $0 < a < 1$ alors $\ln(a) < 0$ donc la fonction \log_a est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

Exercices d'application :

- 1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\log_3(x^2 - 1) = 1$
- 2) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $\log^2 x - \log x - 2 > 0$
- 3) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) > \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$