Etude et représentation graphique de quelques fonctions

Dans toute la leçon le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Activités :

Activité 1 :

Soient les fonctions $f: x \longmapsto x^2$, $g: x \longmapsto x^2+1$ et $h: x \longmapsto (x-1)^2$

1.a. Calculer dans un tableau les images par f des nombres :

$$0\,;\frac{1}{2}\,;1\,;\frac{3}{2};2\,;\frac{5}{2}\ et\ 3$$

b. Placer dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les points de la courbe C_f d'abscisses les nombres précédents, ainsi que leurs symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, puis donner une allure à la courbe C_f.

On prendra : $\|\vec{\imath}\| = 2cm$ et $\|\vec{\jmath}\| = 1cm$

2. Soient $x \in \mathbb{R}$, M le point de C_f d'abscisse x, M' le point de C_g d'abscisse x et $M"$ le point de C_h d'abscisse $x+1$

Vérifier que $\overrightarrow{MM'} = \vec{\jmath}$ et que $\overrightarrow{MM''} = \vec{\imath}$

En déduire C_g et C_h sont les images de C_f par des transformations à bien déterminer.

3. Tracer C_g et C_h dans le même repère.

4. Soit la fonction $p : x \longmapsto x^2+2x-1$

a. Vérifier que $p(x) = (x+1)^2-2$

b. Montrer que C_p est l'image de C_f par la translation de vecteur $-\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$ puis construire C_p dans un repère orthonormé.

Activité 2 :

Soient les fonctions $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$, $g : x \longmapsto \frac{1}{x} - 2$ et $h : x \longmapsto \frac{1}{x-2}$

1.a. Calculer dans un tableau les images par f des nombres :

$$\frac{1}{4} ; \frac{1}{2} ; 1 ; \frac{3}{2} ; 2 ; \frac{5}{2} ; 3 \text{ et } 4$$

b. Placer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les points de la courbe C_f d'abscisses les nombres précédents, ainsi que leurs symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, puis donner une allure à la courbe C_f.

On prendra : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$

2. Soient $x \in \mathbb{R}$, M le point de C_f d'abscisse x, M' le point de C_g d'abscisse x et $M"$ le point de C_h d'abscisse $x + 2$

Vérifier que $\overrightarrow{MM'} = -2\vec{\jmath}$ et que $\overrightarrow{MM''} = 2\vec{\imath}$

En déduire C_g et C_h sont les images de C_f par des transformations à bien déterminer.

3. Tracer C_g et C_h dans le même repère.

4. Soit la fonction $m : x \longmapsto \frac{2x-1}{x-1}$

a. Vérifier que $m(x) = \frac{1}{x-1} + 2$

b. Montrer que C_m est l'image de C_f par la translation de vecteur $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ puis construire C_m dans un repère orthonormé.

I. Fonctions polynômes du second degré

Propriétés :

- La représentation graphique de la fonction $x \longmapsto ax^2$, $a \in \mathbb{R}^*$ est une parabole de sommet O et d'axe l'axe des ordonnées.
- Généralement la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$, $a \in \mathbb{R}^*$ est une parabole de sommet $\Omega\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ et d'axe la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ dans un repère orthogonal.

Exercice :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la nature de C_f et préciser ses éléments caractéristiques.

2.a. Déterminer les coordonnées du point A intersection de C_f avec l'axe des ordonnées.

b. Montrer que C_f coupe l'axe des abscisses en 2 points B et C dont on déterminera les coordonnées.

3. Monter que les points $E\left(2;\frac{3}{2}\right)$ et $F\left(-2;-\frac{5}{2}\right)$ sont communs à C_f et la droite $(\Delta): y = x - \frac{1}{2}$.

4.a. Tracer C_f et (Δ) dans le même repère. Prendre : 1 unité= 1cm

b. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq x - \frac{1}{2}$

II. Fonctions homographiques

Propriétés :

- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$, $a \in \mathbb{R}^*$ est une hyperbole de centre O et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0 \; et \; y = 0$
- Généralement la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$,($c \in \mathbb{R}^* \;\; et \; ad - bc \neq 0$) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = -\frac{d}{c} \; et \; y = \frac{a}{c}$

Exercice d'application :

Soit f la fonction numérique définie sur $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$f(x) = \frac{3x-6}{2x+2}$ et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la nature de C_f et préciser ses éléments caractéristiques.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec les axes des coordonnées.

3. Monter que les points $E\left(2;\frac{3}{2}\right)$ et $F\left(-2;-\frac{5}{2}\right)$ sont communs à C_f et la droite $(\Delta): y = x - \frac{1}{2}$.

4. Tracer C_f. Prendre : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

5. Soit la fonction $g: x \to x^2 - 3$

a. Montrer que C_f *et* C_g se coupent en 3 points dont on déterminera les coordonnées.

b. Tracer C_g dans le même repère.

c. Résoudre graphiquement l'inéquation : $\frac{3x-6}{2x+2} + 3 - x^2 \geq 0$