ETUDE DU PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

Niveau : Terminale Sciences expérimentales

Activités :

Soit dans l'espace $(\mathcal{E})$ un cube $ABCDEFGH$ d'arête a. Calculer en fonction de a les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{GC}$ dans le plan (AEF)
2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ dans le plan (ABC)
3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GO}$ dans le plan (ABC), O étant le centre du carré $EFGH$.

I. Produit scalaire dans l'espace

1.Définition :

Soient dans l'espace trois points non alignés A , B et C .

Le produit scalaire de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ dans l'espace est le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan (ABC)

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Remarque :

Dans l'espace on a aussi : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

2. Propriétés :

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans l'espace et pour tout nombre réel k on a :

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u} \quad ; \quad (k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v}) \quad ; \quad \vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

3. Norme d'un vecteur et distance dans l'espace :

a.Définition :

- Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ dans l'espace est $\vec{u}.\vec{u}$ et est noté $\vec{u}^2$
- La norme de $\vec{u}$ est le nombre positif : $\sqrt{\vec{u}^2}$ noté $\|\vec{u}\|$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$
- La distance de 2 points A et B de l'espace est : $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$

b.Propriétés :

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ dans l'espace et pour tout nombre réel k on a :

- $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$
- $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$: inégalité triangulaire
- $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$: inégalité de Cauchy-Schwartz

II. Base orthonormée et repère orthonormé dans l'espace :

Définitions :

Soit dans l'espace un repère cartésien $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ où $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ et $O, I, J\ et\ K$ quatre points de l'espace non coplanaires.

La base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ est dite orthonormée si et seulement si les vecteurs $\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}$ sont unitaires et orthogonaux deux à deux, c.à.d. :

$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1\ \ et\ \ \vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}\,.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0$

Et dans ce cas le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ est dit orthonormé.

III. Expression analytique du produit scalaire l'espace :

Dans tous les paragraphes suivants de cette leçon, on considérera que l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(\boldsymbol{O};\vec{\boldsymbol{\imath}},\vec{\boldsymbol{\jmath}},\vec{\boldsymbol{k}})$

Propriété :

Pour tous vecteurs $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'^{\vec{\imath}} + y'^{\vec{\jmath}} + z'\vec{k}$ on a :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Exercice d'application :

On considère dans l'espace un point $A(1;-2;3)$ et un vecteur $\vec{u}(0;-1;2)$

Montrer que l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = -1$ est un plan dont on déterminera une équation cartésienne.

IV. Équation d'un plan de vecteur normal donné

1.Définition :

On appelle **vecteur normal** à un plan (P), un vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs directeurs de (P)

2. Propriétés :

Le plan (P) qui passe par un point A et un vecteur normal $\vec{n}(a\,;b;c)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ et a pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$

Exercice d'application :

En utilisant 2 méthodes différentes déterminer une équation cartésienne du plan (P) qui passe par un point $A(2;0;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-3\,;2;5)$

Remarques : Positions relatives de 2 plans

Soient 2 plans $(P): ax+by+cz+d=0$ et $(Q): a'x+b'y+c'z+d'=0$ et leurs vecteurs normaux $\vec{n}(a\,;b;c)$ et $\vec{n}'(a'\,;b';c')$. On a :

- $(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow (\vec{n}\ et\ \vec{n}'sont\ colinéaires)$
- $(P)\ et\ (Q)\ sécants \Leftrightarrow (\vec{n}\ et\ \vec{n}'\ ne\ sont\ pas\ colinéaires)$
- $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow (\vec{n}\,.\,\vec{n}'=0)$

V. Distance d'un point à un plan

Théorème :

Soient le plan $(P): ax+by+cz+d=0$et $A(x_A\,;\ y_A;z_A)$ un point dans l'espace.

La distance du point A au plan (P) est :

$$d\big(A,(P)\big)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Exercice d'application :

Soient le plan $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ et le point $A(1;-1;-3)$ un dans l'espace.

1. Calculer $d\big(A,(P)\big)$

2. Déterminer le triplet de coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur (P)

VI. Étude analytique de la sphère

1. Définition

On nomme sphère de centre Ω, de rayon R, l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = R$

Remarques :

- Tout plan passant par le centre d'une sphère est appelé plan diamétral
- Un grand cercle d'une sphère de centre Ω, de rayon R est tout cercle de centre Ω, de rayon R
- La boule ouverte (ou intérieur de la sphère) de centre Ω, de rayon R, l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM < R$
- L'extérieur de la sphère de centre Ω, de rayon R, l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM > R$

2. Equation cartésienne d'une sphère

Propriétés :

- La sphère de centre $\Omega(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})$, de rayon R estl'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$
- Réciproquement : l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que :
$$x^2+y^2+z^2-2ax-by-cz+d=0$$
est une sphère si et seulement si $a^2+b^2+c^2-d>0$
- La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$
c.à.d. $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Déterminer une équation de la sphère de centre $A(0;-1\,;2)$ et passant par le point $B(3;1\,;2)$.

Exercice 2 :

Déterminer une équation de la sphère de diamètre $[AB]$ sachant que : $A(0;-1\,;2)$ et $B(3;1\,;2)$.

Exercice 3 :

Déterminer l'ensemble (E) dans les cas suivants :

1) $(E): x^2+y^2+z^2-8x+7=0$

2) $(E): x^2+y^2+z^2+2y-6z+11=0$

3) $(E): x^2+y^2+z^2+4x-2y+5=0$

4. Intersection d'une sphère et d'une droite

Propriété :

Soient (S) une sphère du centre Ω *et de rayon* R *et* (D) une droite dans l'espace. On pose $d = d(\Omega;\ (D))$

- (La sphère (S) et la droite (D)n'ont aucun point commun)$\Leftrightarrow$ $d > R$
- (La sphère (S) et la droite (D) ont un seul point commun)$\Leftrightarrow$ $d = R$
- (La sphère (S) et la droite (D) ont 2 points communs)$\Leftrightarrow$ $d < R$

Exercice d'application :

Soient (S) la sphère d'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 1 = 0$$

et la droite (D) définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -3 - 2t \end{cases}$$

5. Intersection d'une sphère et d'un plan

Propriété :

Soient (S) une sphère du centre Ω *et de rayon* R *et* (P) un plan dans l'espace. On pose $d = d(\Omega;\ (P))$

- (La sphère (S) et le plan (P)n'ont aucun point commun)$\Leftrightarrow$ $d > R$
- (La sphère (S) et le plan (P) ont un seul point commun)$\Leftrightarrow$ $d = R$
- (La sphère (S) et le plan (P) se coupent en un cercle (C))$\Leftrightarrow$ $d < R$

  De plus le cercle (C) est de centre le point H projeté orthogonal de Ω sur le plan (P), et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

Exercice d'application :

Etudier l'intersection de la sphère (S) et le plan (P) dans les cas suivants :

1.$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + y - 2z - 3 = 0$ et $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$

2. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0$ et $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$

3. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z - 7 = 0$ et $(P): x + y + z - 4 = 0$

7. Plan tangent à une sphère

Propriété :

Soient (S) une sphère du centre Ω *et* A un point de (S).

Il existe un unique plan (P) tangent à (S) au point A. Ce plan est défini par :

$$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0,$$ *pour tout point M de l'espace.*

Le vecteur $\overrightarrow{A\Omega}$ est normal au plan (P).

Exercice d'application :

Soit (S) la sphère d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4 = 0$

1. Vérifier en utilisant 2 méthodes distinctes que le point $A(-1\,;2\,;1)$ appartient à la sphère (S)

2. Ecrire une équation cartésienne du plan (P) tangent à (S)