# PRODUIT VECTORIEL

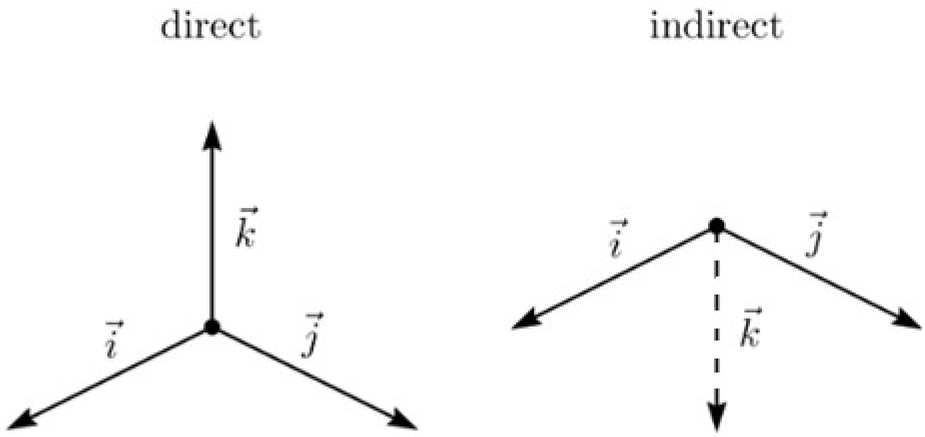
Niveau : *Terminale Sciences expérimentales*

## I. Orientation de l'espace :

On munit l'espace $\mathcal{E}$ d'un repère cartésien $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ où $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}, \vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ et $O, I, J\ et\ K$ quatre points de l'espace non coplanaires.

Pour un observateur placé les pieds en O la tête en K et regardant Ox et Oy, deux cas peuvent se produire :

(1) (2)



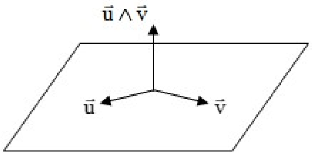

On choisit la 1ère figure correspondante au sens direct et on dit que le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ est direct et que la base $(\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ est directe.

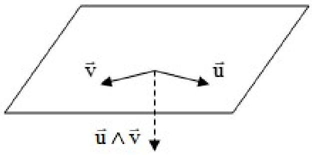
## II. Produit vectoriel de 2 vecteurs dans $\mathcal{V}_3$

### 1. Définition

On nomme produit vectoriel du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, tel que :

- ✓ Si $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$,
- ✓ Si $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors :
  - $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
  - Le triplet ( $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}$ ) est direct,
  - $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||sin\theta|$ où $\theta$ est la mesure en radians de l'angle *orienté* des vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$.






***Remarque :***

Si ABC est un triangle, alors : $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = AB.AC.sin\widehat{BAC}$ , où $\widehat{BAC}$ est la mesure de l'angle géométrique $\left[\widehat{BAC}\right]$.

***Exercice d'application :***

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct. On considère les points $A(2;1;-1)$, $B(0;2;1)$ et $C(6;4;0)$.

1. Calculer $cos\widehat{BAC}$ et $sin\widehat{BAC}$

2. En déduire la mesure de l'angle géométrique $\left[\widehat{BAC}\right]$

***2. Propriétés :***

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$ , $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout nombre réel $\lambda$, on a :

- ($\vec{u}$ $et$ $\vec{v}$ sont colinéaires) $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$
- $\vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{w} \wedge \vec{u}) + (\vec{w} \wedge \vec{v})$

***Exercice d'application :***

Montrer que si 3 vecteurs $\vec{u}$ , $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont tels que : $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{w} \wedge \vec{u}$$

## *III. Expression analytique du produit vectoriel dans une base orthonormée*

***Dans tous les paragraphes suivants de cette leçon, on considérera que l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$***

### *Activités :*

Comme la base $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ est orthonormée et directe, alors :

- ✓ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ : Vecteurs normés.
- ✓ $\vec{i}\wedge\vec{j} = \vec{k},\ \vec{j}\wedge\vec{k} = \vec{i},\vec{k}\wedge\vec{i} = \vec{j}$ : Définition du produit vectoriel.
- ✓ $\vec{i}\wedge\vec{i} = \vec{j}\wedge\vec{j} = \vec{k}\wedge\vec{k} = \vec{0}$ : 2 vecteurs colinéaires.

On considère les 2 vecteurs dans $\mathcal{V}_3$ :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\,\vec{j} + z\vec{k}\ ,\ \vec{v} = x'\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\vec{k}$$

Calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$

### *Propriété :*

Pour tous les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ de $\mathcal{V}_3$ on a :

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\,\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$$

### *Remarque :*

*Pour mémoriser on peut poser :*

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \cancel{x} & \cancel{x'} \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ \cancel{y} & \cancel{y'} \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ \cancel{z} & \cancel{z'} \end{vmatrix}\vec{k}$$

***Exercices d'application :***

***Exercice 1 :***

On considère les vecteurs $\vec{u}(4;2;4)$, $\vec{v}(1;0;2)$ et $\vec{w}(-2;-2;0)$.

1) Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$, en déduire que $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = 0$

2) Que peut-on dire des vecteurs $\vec{u}$ , $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ?

***Exercice 2 :***

On considère les points $A(2;0;2)$, $B(1;-2;0)$, $C(1;-1;1)$.

Déterminer les coordonnées du vecteur : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

## ***IV. Applications du produit vectoriel :***

### ***1. Aire d'un triangle ou d'un parallélogramme :***

***Propriétés :***

L'aire du triangle $ABC$ est : $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$

L'aire du parallélogramme $ABCD$ est : $S_{ABCD} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$

***Exercice d'application :***

On considère les points $A(1;2;-2)$, $B(0;3;-3)$, $C(1;1;-2)$.

1. Vérifier que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\vec{\imath} + \vec{k}$, en déduire que les points $A, B\ et\ C$ ne sont pas alignés.

2. Calculer l'aire du triangle $ABC$

3. Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$, sans préciser les coordonnés du point $D$.

## 2. Equation d'un plan défini par 3 points non alignés

**Propriétés :**

Si $A, B\ et\ C$ sont des points non alignés, alors le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan $(ABC)$ et on a :

$$\forall M \in \mathcal{E} : M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$$

**Exercice d'application :**

On considère les points $A(2; 0; 0)$, $B(3; 2; 0)$, $C(0; 0; 4)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, en déduire que les points $A, B\ et\ C$ ne sont pas alignés.

2. En déduire une équation cartésienne du plan $(ABC)$

## 3. Intersection de 2 plans

**Propriétés :**

Si $(\Delta)$ est la droite définie comme intersection des deux plans $(P)\ et\ (P')$ et de vecteurs normaux respectivement $\vec{n}\ et\ \overrightarrow{n'}$ alors le vecteur $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'}$ est un vecteur directeur de $(\Delta)$.

**Exercice d'application :**

1. Vérifier que les 2 plans $(P): 2x - z + 1 = 0\ et\ (P'): x + y + z = 0$, se coupent en droite $(\Delta)$.

2. Calculer $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'}$, où $\vec{n}\ et\ \overrightarrow{n'}$ sont des vecteurs normaux respectivement de $(P)\ et\ (P')$

3. En déduire une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$.

## ***4. Distance d'un point à une droite***

***Activité :***

Soit $(\Delta)$ une droite qui passe par un point $A$ de vecteur directeur $\vec{u}$ , $M$ un point de l'espace et $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $(\Delta)$.

Montrer que $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$, en déduire que :

$$HM = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

***Propriétés :***

La distance d'un point M dans l'espace à une droite $(\Delta) = D(A, \vec{u})$ est :

$$d\big(M, (\Delta)\big) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

***Exercice d'application :***

Calculer la distance du point $M(1\,;2\,;-1)$ à la droite $(\Delta)$ paramétrée par :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$