

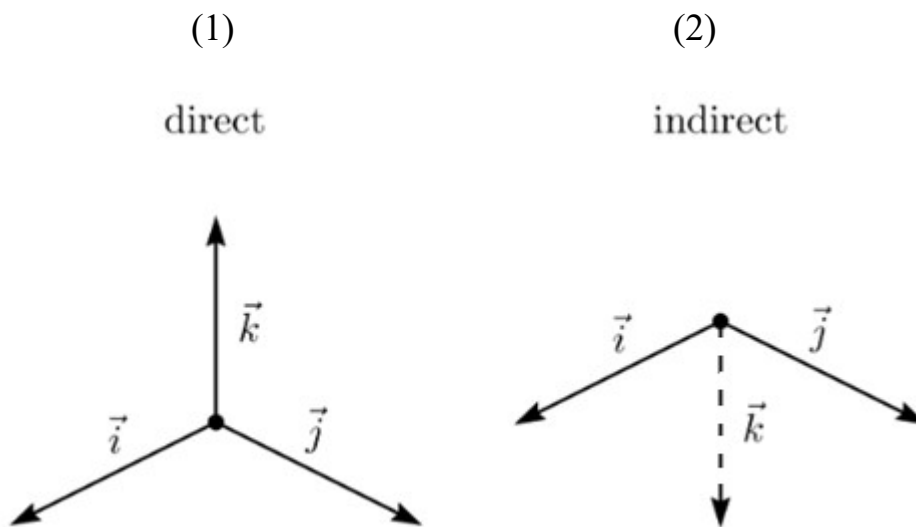
PRODUIT VECTORIEL

Niveau : 1^{ère} Sciences mathématiques

I. Orientation de l'espace :

On munit l'espace \mathcal{E} d'un repère cartésien $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ et O, I, J et K quatre points de l'espace non coplanaires.

Pour un observateur placé les pieds en O la tête en K et regardant Ox et Oy , deux cas peuvent se produire :



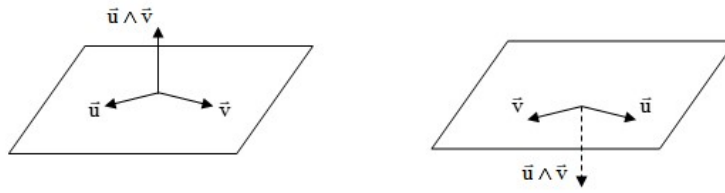
On choisit la 1^{ère} figure correspondante au sens direct et on dit que le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct et que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe.

II. Produit vectoriel de 2 vecteurs dans \mathcal{V}_3

1. Définition

On nomme produit vectoriel du vecteur \vec{u} par le vecteur \vec{v} , le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, tel que :

- ✓ Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$,
- ✓ Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, alors :
 - $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à chacun des vecteurs \vec{u} et \vec{v} ,
 - Le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est direct,
 - $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin \theta|$ où θ est la mesure en radians de l'angle orienté des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .



Remarque :

Si ABC est un triangle, alors : $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}$, où \widehat{BAC} est la mesure de l'angle géométrique $[\widehat{BAC}]$.

Exercice d'application :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct. On considère les points $A(2; 1; -1)$, $B(0; 2; 1)$ et $C(6; 4; 0)$.

1. Calculer $\cos \widehat{BAC}$ et $\sin \widehat{BAC}$
2. En déduire la mesure de l'angle géométrique $[\widehat{BAC}]$

2. Propriétés :

Pour tous les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} et pour tout nombre réel λ , on a :

- $(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}) \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$
- $\vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{w} \wedge \vec{u}) + (\vec{w} \wedge \vec{v})$

Exercice d'application :

Montrer que si 3 vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont tels que : $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{w} \wedge \vec{u}$$

III. Expression analytique du produit vectoriel dans une base orthonormée

Dans tous les paragraphes suivants de cette leçon, on considérera que l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Activités :

Comme la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée et directe, alors :

- ✓ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$: Vecteurs normés.
- ✓ $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$: Définition du produit vectoriel.
- ✓ $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$: 2 vecteurs colinéaires.

On considère les 2 vecteurs dans \mathcal{V}_3 :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Propriété :

Pour tous les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de \mathcal{V}_3 , on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

Remarque :

Pour mémoriser on peut poser :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \cancel{x} & \cancel{x'} \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ \cancel{y} & \cancel{y'} \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ \cancel{z} & \cancel{z'} \end{vmatrix} \vec{k}$$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

On considère les vecteurs $\vec{u}(4; 2; 4)$, $\vec{v}(1; 0; 2)$ et $\vec{w}(-2; -2; 0)$.

1) Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$, en déduire que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$

2) Que peut-on dire des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ?

Exercice 2 :

On considère les points $A(2; 0; 2)$, $B(1; -2; 0)$, $C(1; -1; 1)$.

Déterminer les coordonnées du vecteur : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

IV. Applications du produit vectoriel :

1. Aire d'un triangle ou d'un parallélogramme :

Propriétés :

L'aire du triangle ABC est : $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

L'aire du parallélogramme $ABCD$ est : $S_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

Exercice d'application :

On considère les points $A(1; 2; -2)$, $B(0; 3; -3)$, $C(1; 1; -2)$.

1. Vérifier que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\vec{i} + \vec{k}$, en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Calculer l'aire du triangle ABC

3. Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$, sans préciser les coordonnées du point D .

2. Equation d'un plan défini par 3 points non alignés

Propriétés :

Si A, B et C sont des points non alignés, alors le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC) et on a :

$$\forall M \in \mathcal{E} : M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

Exercice d'application :

On considère les points $A(2; 0; 0)$, $B(3; 2; 0)$, $C(0; 0; 4)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)

3. Intersection de 2 plans

Propriétés :

Si (Δ) est la droite définie comme intersection des deux plans (P) et (P') et de vecteurs normaux respectivement \vec{n} et \vec{n}' alors le vecteur $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ est un vecteur directeur de (Δ) .

Exercice d'application :

1. Vérifier que les 2 plans $(P): 2x - z + 1 = 0$ et $(P'): x + y + z = 0$, se coupent en droite (Δ) .
2. Calculer $\vec{n} \wedge \vec{n}'$, où \vec{n} et \vec{n}' sont des vecteurs normaux respectivement de (P) et (P')
3. En déduire une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

4. Distance d'un point à une droite

Activité :

Soit (Δ) une droite qui passe par un point A de vecteur directeur \vec{u} , M un point de l'espace et H le projeté orthogonal de M sur (Δ) .

Montrer que $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$, en déduire que :

$$HM = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Propriétés :

La distance d'un point M dans l'espace à une droite $(\Delta) = D(A, \vec{u})$ est :

$$d(M, (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Exercice d'application :

Calculer la distance du point $M(1 ; 2 ; -1)$ à la droite (Δ) paramétrée par :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$