ROTATIONS DU PLAN

Niveau : 1ère Sciences mathématiques

On se situe dans un **plan orienté**

Activités

1) Construire dans le plan trois points distincts Ω , M et N tels que :

$$\left(\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \frac{\pi}{5} \ \ [mod\ 2\pi] \ \ , \Omega\mathrm{M} = 4 \text{ et } \Omega\mathrm{N} = 5$$

2) Construire les points $M' et\ N'$ sachant que :

$$\begin{cases} \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3} \ \ [2\pi] \\ \Omega\mathrm{M} = \Omega\mathrm{M}' \end{cases}$$

$et.$

$$\begin{cases} \left(\overline{\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega N'}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3} \ \ [2\pi] \\ \Omega\mathrm{N} = \Omega\mathrm{N}' \end{cases}$$

3) Montrer que :

$$MN = M'N'$$

Et que :

$$\left(\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{N}}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{N}'}}\right) \ \ [mod\ 2\pi]$$

4) Déterminer des mesures pour les angles orientés :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}}\right) \ ; \ \left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{M'N'}}}\right)$$

I. Définition d'une rotation dans un plan

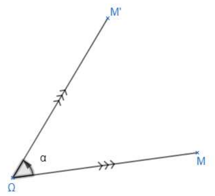
1.Définitions

- Une rotation de centre Ω et d'angle α est une transformation r laissant le point Ω invariant et associe à tout point M du plan (P) différent de Ω le point M' défini par :

$$r(M) = M' \iff \begin{cases} \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \alpha \ [mod\ 2\pi] \\ \Omega\mathrm{M} = \Omega\mathrm{M}' \end{cases}$$

On note : $r = r(\Omega, \alpha)$.

- La rotation $r = r(\Omega, -\alpha)$ est appelée la **rotation réciproque** de la rotation $r = r(\Omega, \alpha)$ et est notée $r^{-1} = r = r(\Omega, -\alpha)$



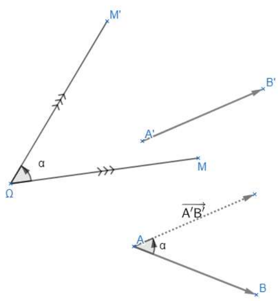
Remarque :

On a : $r(\Omega, -\alpha)\ o\ r(\Omega, \alpha) = r(\Omega, \alpha)\ o\ r(\Omega, -\alpha) = id_{(P)}$

2. Propriété fondamentale d'une rotation :

Pour tous points distincts A, B d'images respectives A', B' par une rotation d'angle α, on a :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\right) \equiv \alpha \ [mod\ 2\pi]$$



Exercice d'application :

Construire un triangle équilatéral ABC direct. On considère la rotation r de centre A et de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) Quelle est l'image du point B par la rotation r ?

2) Déterminer l'image du triangle ABC par la rotation r et construire cette image.

II. Propriétés des rotations

Une rotation dans le plan **conserve** :

1. la mesure des **angles orientés :** c.à.d. pour tout trois points distincts A, B, C d'images respectives A', B', C' par la rotation $r = r(\Omega, \alpha)$ on a :

$$\left(\overline{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}, \overrightarrow{\mathrm{A'C'}}}\right) \;\; [mod\ 2\pi]$$

2. la **distance :** c.à.d. pour tous points distincts A, B d'images respectives A', B' par la rotation $r = r(\Omega, \alpha)$ on a :$AB = A'B'$

3.le coefficient d'alignement de 3 points : c.à.d. pour tout trois points alignés A, B, C d'images respectives A', B', C' par la rotation $r = r(\Omega, \alpha)$ on a :

Les points A', B', C' sont alignés et si : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ alors $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = k\ \overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$. ($k \in \mathbb{R}$)

4.le **barycentre** : c.à.d. pour tout trois points distincts A, B, G d'images respectives A', B', G' par la rotation $r = r(\Omega, \alpha)$ on a :

Si $G = bar\{(A, a), (B, b)\}$ alors $G' = bar\{(A', a), (B', b)\}$

En particulier une rotation dans le plan **conserve** Le parallélisme, et conserve l'orthogonalité.

III. Image par une rotation d'un segment, d'une droite et d'un cercle :

Propriétés :

Soient deux points A, B d'images respectives A', B' par une rotation $r = r(\Omega, \alpha)$ et R un nombre réel strictement positif.

- L'image d'un segment $[AB]$ par la rotation r est le segment $[A'B']$
- L'image d'une droite (AB) par la rotation r est droite $(A'B')$
- L'image d'un cercle de centre A et de rayon R par la rotation r est le cercle de centre A' et de rayon R .

Exercice d'application :

Soient ABCD un carré direct de centre O : $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi]$; et les points $I\,, J\,, K \; et \; L$ les milieux respectifs des segments $[AB]\,, [BC]\,, [CD] \; et \; [DA]$.

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Déterminer par la rotation r les images de points $A \; et \; B$, en déduire l'image du point I.

2) Déterminer par la rotation r l'image du points C, en déduire l'image de J.

3) Déterminer par la rotation r l'image du points D, en déduire l'image de K.

4) Montrer que $IJKL$ est un carré.

VI. Décomposion d'une translation :

Activité 1 :

On considère 2 droites parallèles (Δ_1) et (Δ_2)

1. Montrer que $S_{(\Delta_2)} o S_{(\Delta_1)}$ est la translation de vecteur $2\vec{u}$

Où $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$, $A \in (\Delta_1)$ et $A' \in (\Delta_2)$ et $(AA') \perp (\Delta_1), (AA') \perp (\Delta_2)$

2. Réciproquement soit (Δ) une droite de vecteur directeur orthogonal à un vecteur $\vec{u}$ non nul.

Dessiner la droite (Δ') image de (Δ) par la translation $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}$ de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$ et montrer que: $t_{\vec{u}} = S_{(\Delta')} \ o \ S_{(\Delta)}$

Propriétés :

- La composée de 2 symétries axiales d'axes parallèles est une translation.
- Toute translation se décompose en 2 symétries axiales d'axes parallèles

Exercice d'application :

ABCD est un carré direct de centre O et I le milieu du segment $[AB]$.

1. Déterminer la nature de la transformation du plan suivante :

$$f = S_{(OI)} \ o \ S_{(AD)}$$

2. Décomposer la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ en 2 symétries axiales d'axes parallèles

V. Décomposition d'une rotation

Activité :

Soient dans le plan (P), (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en un point O.

Pour tout point M du plan (P) , on considère les points:

$$M_1 = S_{(\Delta)}(M) \ et \ M' = S_{(\Delta')}(M_1)$$

On suppose que : $M \notin (\Delta) \ et \ M_1 \notin (\Delta')$ et l'on considère les 2 points $I \ et \ J$ milieu respectifs des segments $[MM_1]$ et $[M_1M']$.

1.a Faire une figure et montrer que $OM' = OM$

b. Montrer que $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right) \ [2\pi]$, en déduire que la mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right)$ est constante.

c. Déterminer $S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)}(O)$, en déduire la nature de l'application $S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)}$

4) Réciproquement, on considère 2 points distincts $O_1 \ et \ O_2$ la droite

$(\Delta_2) = (O_1 O_2)$ et la rotation r de centre O_1 et d'angle α.

Construire un point A tel que: $\left(\overrightarrow{O_1 A}, \overrightarrow{O_1 O_2}\right) \equiv \frac{\alpha}{2} \ [2\pi]$ et on pose $(\Delta_1) = (O_1 A)$.

Montrer que $r = S_{(\Delta_2)} o S_{(\Delta_1)}$

<u>Propriété :</u>

- La composée $S_{(\Delta_2)} o S_{(\Delta_1)}$ de 2 symétries axiales d'axes (Δ_1) et (Δ_2) sécants en un point I est la rotation de centre I et d'angle $2\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)$, ou $\overrightarrow{u_1} \ et \ \overrightarrow{u_2}$ sont 2 vecteurs directeurs respectivement de (Δ_1) et (Δ_2)
- Toute rotation r de centre un point Ω se décompose en 2 symétries axiales d'axes (Δ_1) et (Δ_2)secants en Ω tels que:

  $r = S_{(\Delta_2)} o S_{(\Delta_1)}$ avec (Δ_1) est une droite qui passe par Ω et (Δ_2) son image par la rotation $r\left(\Omega, \frac{\alpha}{2}\right)$.

<u>Exercice d'application :</u>

ABCD est un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

1) Déterminer la nature des transformations :

$$f = S_{(BD)} o S_{(AC)} \ \ et \ \ g = S_{(AB)} o S_{(AC)}$$

2) Décomposer la rotation $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ en composée de 2 symétries axiales.

VI. Composée de 2 rotations dans le plan

Activité 1 :

On considère 2 rotations de même centre Ω et d'angles respectifs $\theta_1 \ et \ \theta_2$.

On pose : $r_1 = r(\Omega, \theta_1) et \ r_2 = r(\Omega, \theta_2)$

1. Vérifier que : $r_1 o r_2(\Omega) = \Omega$

2. Montrer que pour tout point M du plan distinct de Ω, tel que:

$$r_1(M) = M_1 \ et \ r_2(M_1) = M'$$

on a :

$$\Omega\mathrm{M}' = \Omega M \ et \ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}}\right) \equiv \theta_1 + \theta_2 \ [2\pi]$$

En déduire la nature de $r_1 o r_2$ et que $r_1 o r_2 = r_2 o r_1$

Activité 2 :

On considère 2 rotations : $r_1 = r(\Omega_1, \theta_1) et \ r_2 = r(\Omega_2, \theta_2)$ telles que $\Omega_1 \neq \Omega_2$

Soit (Δ) est la droite $(\Omega_1\Omega_2)$

1. Déterminer les droites (Δ_1) et (Δ_2) sachant que:

$$r_1 = S_{(\Delta)} o S_{(\Delta_1)} \text{ et } r_2 = S_{(\Delta_2)} o S_{(\Delta)}$$

2. Montrer que $S_{(\Delta)} o S_{(\Delta)} = id_{(P)}$

3. En déduire que la nature de $r_2 o r_1$ suivant les valeurs de $\theta_1 + \theta_2$

Propriétés :

- La composée de 2 rotations $r_1 = r(\Omega, \theta_1) et\, r_2 = r(\Omega, \theta_2)$ de même centre Ω est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta_1 + \theta_2$
- La composée de 2 rotations $r_1 = r(\Omega_1, \theta_1) et\, r_2 = r(\Omega_2, \theta_2)$ de centres différents est :
  - ✓ une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ si et seulement si $\theta_1 + \theta_2 \neq 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$
  - ✓ une translation si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que: $\theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Construire un triangle équilatéral ABC direct de centre de gravité O et préciser la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations du plan suivantes :

1. $f = r\left(O, \frac{\pi}{3}\right) \, o \, r\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$ 2. $g = r\left(O, \frac{\pi}{3}\right) \, o \, r\left(O, -\frac{\pi}{3}\right)$

3. $h = r\left(O, \frac{\pi}{3}\right) \, o \, r\left(O, \frac{\pi}{3}\right)$ 4. $l = r\left(O, \frac{\pi}{3}\right) \, o \, r\left(O, -\frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 2 :

Construire un carré direct $ABCD$ de centre de gravité O et préciser la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations du plan suivantes :

1. $f = r(D, \pi) \, o \, r(A, \pi)$

2. $g = r(D, \pi) \, o \, r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$

3. $h = r\left(C, \frac{\pi}{2}\right) \, o \, r(D, \pi) \, o \, r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$