Suites Numériques

Activités :

Activité 1 :

On considère les successions de nombres :

la liste $(u_n): -5\ ;\ -2\ ; 1\ ; 4\ ; 7\ ; 10 \ldots$, on notera :

$$u_0 = -5\ ;\ u_1 = -2\ ;\ u_2 = 1\ ;\ u_3 = 4\ ; u_4 = 7\ ;\ u_5 = 10\ .\ .\ .$$

1) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) Démontrer cette conjecture par récurrence.

3) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

Activité 2 :

On considère la liste : $(v_n): 1\ ;\ 2\ ; 4\ ; 8\ ; 16\ ; 32 \ldots$ que l'on note :

$$v_0 = 1\ ;\ v_1 = 2\ ;\ v_2 = 4\ ;\ v_3 = 8\ ; v_4 = 16\ ;\ \ v_5 = 32\ .\ .\ .$$

1) Donner l'expression explicite de v_n et démontrer la par récurrence.

2) Donner la relation de récurrence entre $v_{n+1}\ et\ v_n$

Activité 3 :

On considère la liste $(F_n): 1\ ;\ 1\ ; 2\ ; 3\ ; 5\ ; 8\ ; . \ldots$

$$F_0 = 1\ ;\ F_1 = 1\ ;\ F_2 = 2\ ;\ F_3 = 3\ ; F_4 = 5\ ;\ F_5 = 8\ .\ .\ .$$

Relation de récurrence :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\ \ et\ F_0 = F_1 = 1$.(Suite de Fibonacci)

Calculer F_{12}

I. Définition et représentation graphique d'une suite

1.Définition :

Une suite numérique (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté $u_n$est appelé le terme de rang n de cette suite (ou d'indice n)

$$u: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u(n) = u_n$$

2. Définir une suite

a. De façon explicite

Une suite numérique (u_n) est définie de façon explicite si le terme général un s'exprime en fonction de n : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$

b. Par récurrence

Définition :

Lorsque le terme général un dépend du ou des terme(s) précédent(s), on définit alors la suite par une relation de récurrence et par un ou plusieurs premier(s) terme(s).

La suite est dite récurrente à un terme si un ne dépend que du terme précédent. u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$

La suite est dite récurrente à deux termes si un dépend des deux termes qui le précèdent. u_0 , u_1 et $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$

3. Représentation graphique d'une suite

Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de points de coordonnées (n, u_n)

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

a) $u_n = 3 - 2n$ b) $v_n = 3n^2 - 1$

Exercice 2 :

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

a) Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1 \end{cases}$

b) Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 3v_n - 2 \end{cases}$

Exercice 3 :

Représenter dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1 \quad et \quad \|\vec{j}\| = 4$ les six premiers termes de la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}: u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

II. Suite majorée, minorée , bornée

Activité :

Soit (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}: u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

1) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}: -\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}: |u_n| \leq 1$

Définitions et propriété :

- Une suite (u_n) est dite majorée ssi $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq M$
- Une suite (u_n) est dite minorée ssi $\exists m \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq m$
- Une suite (u_n) est dite bornée ssi elle est majorée et minorée
- Une suite (u_n) est bornée ssi $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: |u_n| \leq M$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soit la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{3n+2}{n+1}$

Montrer que cette suite est minorée par 2 et majorée par 3. Est-elle bornée ?

Exercice 2 :

Montrer que la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = 3cosn$ est bornée.

Exercice 3 :

Soit la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 1$

Montrer par récurrence que la suite (w_n) est majorée par 2.

III. Sens de variation d'une suite

Activités :

1) Soit (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}: u_n = 2^n$

Vérifier que $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$ et $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} > u_n$

2) Soit (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}: v_n = \frac{1}{2^n}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}: v_{n+1} < v_n$

3) Soit (w_n) définie par $w_0 = 1 \; et \; \forall n \in \mathbb{N}: w_{n+1} = 2w_n - 1$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}: w_n = 1$

Définitions

► Une suite (u_n) est dite croissante ssi : $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} \geq u_n$

► Une suite (u_n) est dite décroissante ssi : $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} \leq u_n$

► Une suite (u_n) est dite constante ssi : $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = u_n$

Exercices d'application :

Exercice :

1) Soit la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{-n+1}{n+2}$

Montrer que cette suite décroissante.

2) Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3$

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : v_n \leq 6$

b) Montrer que la suite (v_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (v_n) est minorée par 5

3) Représenter graphiquement dans un même repère la droite d'équation $y = x$ et les deux suites (u_n) et (v_n).

IV. Exemples de suites :

Activités :

On considère les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3 + 2n \text{ et } v_n = \frac{2^{2n+2}}{3^n}$$

1) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = 2 \; et \; \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4}{3}$

2) Déterminer la monotonie de chacune des deux suites.

1. Suite arithmétique

Définition et propriétés

► Une suite (u_n) est dite arithmétique de raison r ssi : $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = u_n + r$

► Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors :

► $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 : u_n = u_p + (n-p)r$

► $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 / n > p : u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$

► $a \,, b \; et \; c$ trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ssi $b = \frac{a+c}{2}$

Remarque :

Sens de variation d'une suite arithmétique (u_n) de raison r :

$Si\, r > 0$: (u_n) est croissante, et $si\, r < 0\, alors$ (u_n) est décroissante

Démonstrations :

Terme général d'une suite arithmétique ?

La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie la relation $u_{n+1} = u_n + r$. On a alors :

$$\left.\begin{array}{r} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ u_3 = u_2 + r \\ \dots \\ u_{n-1} = u_{n-2} + r \\ u_n = u_{n-1} + r \end{array}\right\} \begin{array}{l} En \text{ additionnant membre à membre ces } n \text{ égalités, on obtient :} \\ u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + nr \end{array}$$

Soit, en retranchant aux deux membres les termes identiques : $u_n = u_0 + nr$

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

Pour simplifier calculons $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_0$

$\Longrightarrow 2S = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \cdots + (u_n + u_0)$

Or pour tout entier k compris entre $0\ et\ n$ on a :

$u_k + u_{n-k} = u_0 + kr + u_0 + (n-k)r = u_0 + (u_0 + nr) = u_0 + u_n$: Ne dépendant pas de k. De plus le nombre de tels termes dans $2S$ est $n+1$; d'où :

$2S = (n+1)(u_0 + u_n) \Longrightarrow u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$

Trois termes consécutifs a , $b\ et\ c$ d'une suite arithmétique ?

On a $b - a = c - b \Longrightarrow 2b = a + c \Longrightarrow b = \frac{a+c}{2}$.

(Moyenne arithmétique de $a\ et\ c$)

Exercices d'application :

Exercice 1 :

La suite (u_n) définie par : $u_n = 3 + 2\text{n}$ est-elle arithmétique ?

Exercice 2 :

La suite (v_n) définie par : $v_n = 1 + \sqrt{n}$ est-elle arithmétique ?

Exercice 3 :

Déterminer l'expression, en fonction de n, de la suite arithmétique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

Exercice 4 :

Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_4 = 5$ et $u_{20} = 53$.

a) Déterminer la raison r et le premier terme u_0 de la suite (u_n).

b) Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 5 :

Expliquer en utilisant une suite arithmétique convenable pourquoi on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 6 :

On pose : $S = 33 + 36 + 39 + \cdots + 267$

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_3 = 33$, et de raison $r = 3$.

1) Déterminer l'entier n sachant que : $u_n = 267$

2) En déduire la valeur de S.

2. Suite géométrique

Définition et propriétés

► Une suite (u_n) est dite géométrique de raison q ssi : $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = qu_n$

► Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors :

► $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2: u_n = u_p q^{n-p}$

► $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 / n > p: u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

► $a, b\ et\ c$ trois termes consécutifs d'une suite géométrique ssi $b^2 = ac$

Démonstrations

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nul et de premier terme u_0 non nul.

Terme général ?

Comme $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = q \times u_n$.

Alors tous les termes de la suite sont non nuls et on a :

$$\left.\begin{array}{r} u_1 = q \times u_0 \\ u_2 = q \times u_1 \\ u_3 = q \times u_2 \\ \ldots \\ u_{n-1} = q \times u_{n-2} \\ u_n = q \times u_{n-1} \end{array}\right\} \begin{array}{c} En \text{ multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient :} \\ u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1} \times u_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1} \times q^n \end{array}$$

Comme les termes de la suite sont non nuls, on peut simplifier aux deux membres par les facteurs identiques, et on obtient : $u_n = u_0 \times q^n$

Somme de termes consécutifs ?

Pour simplifier calculons $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$\Longrightarrow S = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + u_0 q^3 + \cdots + u_0 q^n$

$\Longrightarrow qS = qu_0 + u_0 q^2 + u_0 q^3 + u_0 q^4 + \cdots + u_0 q^{n+1}$

$\Longrightarrow S - qS = u_0 - u_0 q^{n+1} \Longrightarrow S = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Trois termes consécutifs $a\,, b\ et\ c$ d'une suite géométrique ?

Supposons $abc\ \neq 0$ donc $\frac{b}{a}=\frac{c}{b} \Longrightarrow b^2 = ac$.

Si $a\ et\ c$ sont positifs alors $b=\sqrt{ac}$ est appelé moyenne géométrique de a et c

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Déterminer l'expression en fonction de n de la suite géométrique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n \end{cases}$$

Exercice 2 :

Considérons la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $u_4 = 4$ et $u_7 = 256$.

a) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).

b) En déduire une expression de la suite en fonction de n.

Exercice 3 :

Calculer les sommes :

$S_1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$ et $S_2 = 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n$ où $n \in \mathbb{N}\ \ et\ n > 2$