Transformations du plan

Activités :

Activité 1 : Symétrie centrale

ABCD est un parallélogramme de centre O. Les points I et J sont respectivement les milieux de [AB] et [CD].

Soit S_O la symétrie centrale de centre O

1. Réaliser une figure.

2. Déterminer l'image du segment [AB] par S_O, en déduire que O est le milieu de [IJ]

3. Soit (Δ) la droite perpendiculaire à (BD) et passant par I.

a. Déterminer l'image du segment [BD] par S_O

b. Déterminer et construire (Δ') l'image de (Δ) par S_O

c. H et K étant les points d'intersection de (Δ) et (Δ') avec (BD), montrer que $S_O(H) = K$, en déduire que IHJK est un parallélogramme.

Activité 2 : Symétrie axiale

$ABCD$ est un rectangle de centre O. A' et C' sont les images respectives de A et C par la symétrie axiale $S_{(BD)}$.

1. Réaliser une figure.

2. Montrer que le point O est le milieu de $[A'C']$

3. En déduire que le quadrilatère $AA'CC'$ est un parallélogramme.

4. Montrer que $AA'CC'$ est un rectangle.

Activité 3 : Translation

1. Construire :

- Un triangle ABC d'orthocentre H.(Intersection de ses hauteurs)
- Un rectangle $BCDE$ à l'extérieur de ce triangle,
- I le projeté orthogonal de D sur (AB)
- J le projeté orthogonal de E sur (AC).

2. Soit $t = t_{\overrightarrow{BE}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.

a. Montrer que $t((AH)) = (AH)$, $t((BH)) = (EJ)$ et $t((CH)) = (DI)$

b. E déduire que les droites $(AH), (EJ)$ et (DI) se rencontrent en un point à bien préciser.

Activité 4 :

1. Construire un carré $ABCD$ et un point Ω à l'extérieur de ce carré.

2. Construire le quadrilatère $A'B'C'D'$ sachant que les points A', B', C' et D' sont tels que :

$$\overrightarrow{\Omega A'} = k\overrightarrow{\Omega A}\,, \overrightarrow{\Omega B'} = k\overrightarrow{\Omega B}\,, \overrightarrow{\Omega C'} = k\overrightarrow{\Omega C} \ et\ \overrightarrow{\Omega D'} = k\overrightarrow{\Omega D}$$

Et ceci dans les cas suivants :

a. $k = \frac{5}{3}$

b. $k = \frac{2}{3}$

c. $k = -\frac{1}{3}$

3. Quelle est la nature de $A'B'C'D'$?

4. Vérifier que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ et exprimer la distance $A'B'$ en fonction de k et AB.

I. L'homothétie :

1.Définition :

Soient k un nombre réel non nul et distinct de 1 et Ω un point du plan.

L'homothétie h de centre Ω et de rapport k est la transformation du plan qui associe à chaque point M du plan un point M' tel que :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

On écrit : $h(M) = M'$

Le point Ω est invariant par l'homothétie h :$h(\Omega) = \Omega$

II. Propriétés caractéristiques de la translation et de l'homothétie

Propriétés :

Une transformation t est une translation du plan si et seulement si pour tous les points $M\ et\ N$ d'images respectives $M'\ et\ N'$ on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{M}'N'} = \overrightarrow{MN}$$

Une transformation h est une homothétie de rapport k si et seulement si pour tous les points $M\ et\ N$ d'images respectives $M'\ et\ N'$ on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{M}'N'} = k\overrightarrow{MN}$$

Cas de la symétrie centrale

Une transformation s est une symétrie centrale si et seulement si pour tous les points $M\ et\ N$ d'images respectives $M'\ et\ N'$ on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{M}'N'} = -\overrightarrow{MN}$$

III. Propriétés des homothéties

1. La distance :

Propriété :

Si $A'\ et\ B'$ sont les images respectives des points $A\ et\ B$ par une homothétie de rapport k, alors $A'B' = |k|AB$

2. Invariance du facteur d'alignement

Propriétés :

Si A', B' et C' sont les images respectives des points A, B et C (distincts 2 à 2) par une homothétie h de rapport k et si $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$. ($\alpha \in \mathbb{R}$)

En particulier :

- Si I est le milieu de $[AB]$ alors $I' = h(I)$ est le milieu de $[A'B']$
- L'image par h de la droite (AB) par h est la droite $(A'B')$
- L'image par h du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$
- L'homothétie conserve le parallélisme des droites.

3. Mesures des angles géométriques

Propriété :

Si A', B' et C' sont les images respectives des points (distincts 2 à 2) A, B et C par une homothétie alors : $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$.

On dit que l'homothétie conserve la mesure des angles géométriques.

En particulier l'homothétie conserve l'orthogonalité des droites.

4. Images d'un cercle :

Propriétés :

L'image d'un cercle (C) de centre I et de rayon R par une homothétie h de rapport k est le cercle (C') de centre $I' = h(I)$ et de rayon $|k|R$

Exercice :

$ABCD$ est un carré de centre O de côté de longueur $10\ cm$.

1. Réaliser une figure et construire le carré $EFGH$ de centre O' et de côté de longueur $6\ cm$ à l'intérieur de $ABCD$ sachant que :

$$E \in [AD] \text{ et } AE = 1cm$$

2. La droite (BF) coupe la droite (AD) en un point I.

Soit h l'homothétie de centre I et qui transforme A en E.

a. Déterminer l'image du point $B\ par\ h$, en déduire que le rapport de h est $k = \frac{3}{5}$

b. Montrer qu'il existe un réel x tel que : $\overrightarrow{IG} = x\overrightarrow{IC}$, en déduire l'image de $C\ par\ h$. (Remarquer que : $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FG}$)

c. Quel est l'image du carré $ABCD$ par l'homothétie h ?

d. Montrer que les points $I, O\ et\ O'$ sont alignés.