Trigonométrie : Formules de transformation

Niveau : 1ère Sciences mathématiques

Activités :

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

On considère 2 points $M\ et\ N$ du cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes respectives a et b. Faire une figure.

1) Déterminer les couples de coordonnées des points $M\ et\ N$
2) Exprimer analytiquement le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$
3) Donner une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}})$
4) Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ trigonométriquement.
5) Déduire l'expression : $cos(a-b) = cosacosb + sinasinb$
6) Déduire les expressions de : $cos(a+b)$, $sin(a-b)$, $sin(a+b)$,

I. Formules d'addition

Propriétés :

Pour tous réels $a\ et\ b$ on a :

$$\cos(a-b) = cosacosb + sinasinb$$

$$cos(a+b) = cosacosb - sinasinb$$

$$sin(a-b) = sinacosb - cosasinb$$

$$sin(a+b) = sinacosb + cosasinb$$

Et si les nombres a, b , $a-b$, $a+b$ sont distincts de $\frac{\pi}{2}+k\pi$ et de $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, alors :

$$tan(a-b) = \frac{tana-tanb}{1+tanatanb} \quad \text{et} \quad tan(a+b) = \frac{tana+tanb}{1-tanatanb}$$

Exercice d'application :

En remarquant : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer les rapports trigonométriques du nombre $\frac{\pi}{12}$

II. Formules de duplication

Propriétés :

Pour tous réel a on a :

$$\cos(2a) = cos^2a - sin^2a = 2cos^2a - 1 = 1 - 2sin^2a$$

$$\sin(2a) = 2sina\,.cosa$$

Et si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors :

$$\tan(2a) = \frac{2tana}{1 - tan^2a}$$

Exercice d'application :

En remarquant : $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, et en utilisant les 3 formules de duplication, calculer $cos\frac{\pi}{8}$, $sin\frac{\pi}{8}$ et $tan\frac{\pi}{8}$

III. Transformation de produits en sommes

Propriétés :

Pour tous réels $a\ et\ b$ on a :

$$cosacosb = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$sinacosb = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$sinasinb = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos\,(a-b))$$

Exercice d'application :

Linéariser le produit : $cosx.cos2x.sin3x$

(Linéariser un produit de sin et cos *: le transformer en somme de sin ou de cos)*

VI. Transformation de sommes en produits

Propriétés :

Pour tous réels $p\ et\ q$ on a :

$$sinp + sinq = 2sin\frac{p+q}{2}.cos\frac{p-q}{2}$$
$$sinp - sinq = 2cos\frac{p+q}{2}.sin\frac{p-q}{2}$$

$$cosp + cosq = 2cos\frac{p+q}{2}.cos\frac{p-q}{2}$$

$$cosp - cosq = -2sin\frac{p+q}{2}.sin\frac{p-q}{2}$$

Exercice d'application :

Ecrire sous forme d'un produit :

$$sinx + \sin(3x)\,;sinx - \sin(3x)\,;cosx + \cos(2x)\,;cosx - \cos\,(5x)$$

V. Transformation de $\boldsymbol{acosx + bsinx}$

Activité :

Vérifier que :

$$cosx + \sqrt{3}sinx = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Propriété :

Soit a et b deux nombres réels non nuls.

Il existe un réel α tel que pour tout réel x on a :

$$acosx + bsinx = \sqrt{a^2 + b^2}cos(x - \alpha)$$

$$ou$$

$$acosx + bsinx = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \alpha)$$

<u>Exercice d'application :</u>

Ecrire $cosx - sinx$ sous les 2 formes $rcos(x + \alpha)$ et $rsin(x - \alpha)$

<u>VI. Equation $acosx + bsinx + c = 0$</u>

Pour résoudre une telle équation il suffit de transformer l'expression $acosx + bsinx$ en $rcos(x - \alpha)$ ou en $rsin(x + \alpha)$ et on se ramène à résoudre une équation de la forme $cosX = cosb \; ou \; sinX = sinb$

<u>Exercices d'application :</u>

Résoudre dans les équations et les inéquations suivantes :

1) $x \in \mathbb{R}$: $cosx + \sqrt{3}sinx = \sqrt{2}$

2) $x \in [0; 2\pi]$: $cosx + \sqrt{3}sinx > \sqrt{2}$

3) $x \in [-\pi, \pi]$: $\sqrt{3}\, cosx - sinx = -1$

4) $x \in [-\pi, \pi]$: $\sqrt{3}\, cosx - sinx \leq -1$

VII.Rappels :

1) Equations trigonométriques

Pour tous réels $a\ et\ b$ on a :

$$cosa = cosb \iff (a = b + k2\pi\ ou\ a = -b + k2\pi\ ; k \in \mathbb{Z})$$

$$sina = sinb \iff (a = b + k2\pi\ ou\ a = \pi - b + k2\pi\ ; k \in \mathbb{Z})$$

Et si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ et\ b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors :

$$tana = tanb \iff (a = b + k\pi\ \ ; k \in \mathbb{Z})$$

Cas particuliers :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$cosx = 0 \iff \left(x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$sinx = 0 \iff (x = k\pi; k \in \mathbb{Z})$$

$$cosx = 1 \iff (x = 2k\pi; k \in \mathbb{Z})$$

$$sinx = 1 \iff \left(x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right)$$

2) Valeurs trigonométriques remarquables :

Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle en degré	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N’existe pas