Vecteurs, droites et plans de l'espace

I. Vecteurs de l'espace

1.Définition

- Deux points $A\ et\ B$ de l'espace définis le vecteur $\overrightarrow{AB}$ caractérisé par :

  - Sa direction : la droite (AB)

  - Son sens de $A\ vers\ B$

  - et sa norme : la distance AB

- Le vecteur nul est $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ pour tout point A de l'espace.

- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Remarque :

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, …

2. Somme de deux vecteurs dans l'espace :

Définition :

La somme de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ est définie par :

- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ tel que le quadrilatère $ABDC$ soit un parallélogramme.
- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$: relation de Chasles

3) Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace

Définition :

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Tout vecteur de la forme $\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$, avec α, β des réels, est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$.

II. Droites de l'espace

1) Vecteurs colinéaires

Définition :

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires $\vec{u}, \vec{v}$ signifie qu'ils ont la même direction c'est à dire : $\exists\lambda \in \mathbb{R}: \vec{u} = \lambda\vec{v}$

2) Vecteur directeur d'une droite

Définition :

On appelle vecteur directeur d'une droite (Δ) tout vecteur non nul qui possède la même direction que la droite (Δ).

Propriété :

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. La droite (Δ) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Propriété :

Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

III. Plans de l'espace

1) Direction d'un plan de l'espace

Propriétés :

Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d'un plan.

2) Caractérisation d'un plan de l'espace

Propriété :

Soit un point A et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ .On note ce plan par $P(A, \vec{u}, \vec{v})$

Remarques :

- Dans ces conditions, le triplet $(A\,; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan.
- Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Propriété :

Deux plans sont parallèles si et seulement si deux vecteurs non colinéaires de l'un des plans sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.

Remarque : Deux plans non parallèles sont sécants suivant une droite.

Propriétés :

- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires, s'il existe un couple de réels $(x\,; y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$.
- Quatre points $A, B, C\ et\ D$ sont coplanaires si les 3 vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires c.à.d. qu'il existe un couple de réels $(x\,; y)$ tel que

$$\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AD}\ .$$