1L spé math -1ES	**Corrigé du D.S. de Mathématiques n°5**	Vendredi 24 avril 2015
	Calculatrice autorisée	Durée : 1h45

Le barème est donné sur 35 points à titre indicatif.

EXERCICE 1. (12 *points*)

Pierre a deux propositions pour son salaire lors de son arrivée dans une entreprise le 01/01/2009 :

Proposition 1 : Il commence avec un salaire de 2000 euros mensuel la première année et son salaire mensuel augmente chaque année de 115 euros.

Proposition 2 : Il commence avec un salaire de 2000 euros mensuel la première année et son salaire mensuel augmente chaque année de 5%.

1. On note u_n son salaire du mois de janvier de l'année 2009 + n avec la proposition 1.

a) Déterminer u_0 puis calculer u_1

u_0 est le salaire pendant l'année 2009 donc $u_0 = 2000$

u_1 est le salaire pendant l'année 2010 donc $u_1 = u_0 + 115 = 2115$

$\boldsymbol{u_0} = $ **2000 euros** et $\boldsymbol{u_1} = $ **2115 euros**

b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

u_n est le salaire mensuel de l'année d'indice n et u_{n+1} est le salaire mensuel de l'année suivante.

Chaque année, on ajoute 115 euros au salaire mensuel donc $u_{n+1} = u_n + 115$ (forme $u_{n+1} = u_n + \mathrm{a}$)

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2000$ et raison a = 115

c) Exprimer u_n en fonction de n

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $\mathrm{u}_0 = 2000$ et raison a = 115

donc $u_n = u_0 + n\mathrm{a} = 2000 + 115n$

$u_n = 2000 + 115n$

d) Déterminer à partir de quelle année son salaire mensuel sera supérieur à 2800 euros avec la proposition 1.

On cherche n tel que $u_n > 2800$.

$$u_n > 2800 \Leftrightarrow 2000 + 115n > 2800$$
$$\Leftrightarrow 115n > 800$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{800}{15} \qquad \text{et } n \text{ est un entier donc } n \geq 7$$

L'année d'indice 7 correspond à 2009 + 7 = 2016

Le salaire mensuel est supérieur à 2800 euros à partir de l'année 2016.

2. On note v_n son salaire du mois de janvier de l'année 2009 + n avec la proposition 2.

a) Déterminer v_0 puis calculer v_1

v_0 est le salaire pendant l'année 2009 donc $\boldsymbol{v_0} = $ **2000 euros**

v_1 est le salaire pendant l'année 2010 donc $v_1 = v_0 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1,05v_0 = 2100$ (le salaire mensuel augmente de 5% chaque année) $\boldsymbol{v_1} = $ **2100 euros**

b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

v_n est le salaire mensuel de l'année d'indice n et v_{n+1} est le salaire mensuel de l'année suivante soit v_n augmenté de 5%

$v_{n+1} = v_n \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1,05v_n$ (forme $v_{n+1} = \mathrm{b}v_n$)

$\boldsymbol{(v_n)}$ est une suite géométrique de raison b = 1,05 et premier terme $\boldsymbol{v_0}$ = 2000

c) Exprimer v_n en fonction de n

(v_n) est une suite géométrique de raison b = 1,05 et premier terme $v_0 = 2000$

donc $v_n = v_0 \times b^n = 2000 \times 1{,}05^n$

$\boldsymbol{v_n = 2000 \times 1{,}05^n}$

d) Déterminer à partir de quelle année son salaire mensuel sera supérieur à 2800 euros avec la proposition 2.

Avec le menu table de la calculatrice en saisissant la fonction $Y1 = 2000 \times 1{,}05^X$

et en paramétrant dans SET : START : 0, END : 50 par exemple et SCALE : 1

on obtient $\boldsymbol{u_6 \approx 2680}$ et $\boldsymbol{u_7 \approx 2814}$ et **la suite (v_n) est croissante** (b > 1 et $v_0 > 0$)

donc le salaire est supérieur à 2800 euros à partir de l'année 2009 + 7 = 2016

Le salaire mensuel est supérieur à 2800 euros à partir de 2016.

Remarque : On peut aussi saisir la suite v_n dans le menu RECUR de la calculatrice, soit avec sa forme explicite $v_n = 2000 \times 1{,}05^n$ (TYPE a_n), soit avec sa forme de récurrence $v_{n+1} = 1{,}05 v_n$ (TYPE a_{n+1})

3. a) Déterminer quelle est la proposition permettant d'avoir un salaire mensuel le plus élevé en 2019.

2019 = 2009 + 10

Il faut donc calculer u_{10} et v_{10}

$\boldsymbol{u_{10}} = 2000 + 115 \times 10 = \mathbf{3150}$ euros mensuels en 2019 avec la première formule.

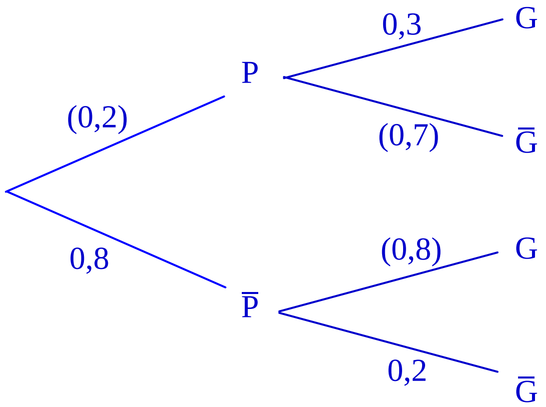
$\boldsymbol{v_{10}} = 2000 \times 1{,}05^{10} \approx \mathbf{3258}$ euros mensuels environ avec la seconde formule.

En 2019 la proposition 2 permet d'avoir un salaire mensuel le plus élevé.

EXERCICE 2. (12 *points*)

Les membres d'un club sportif se présentent à l'accueil soit pour jouer au golf soit pour profiter de la salle de musculation (une activité excluant l'autre).
La probabilité qu'il ne pleuve pas, en été, dans cette région est égale à 0,8. En été, un membre se présente.
S'il pleut, il joue au golf dans 30% des cas.
S'il ne pleut pas, il s'enferme dans la salle de musculation dans 20% des cas.
On note : P l'évènement : « il pleut »,
G l'évènement : « le membre du club joue au golf ».

1. a) Traduire la situation ci-dessus à l'aide d'un arbre pondéré.



b) Calculer la probabilité qu'il pleuve et que le membre du club se présentant à l'accueil joue au golf.

$\mathbf{p(P \cap G)} = (1 - 0,8) \times 0,3 = 0,2 \times 0,3 = \mathbf{0,06}$

c) Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à 0,7.

Les évènements « $P \cap G$ » et « $\overline{P} \cap G$ » sont incompatibles, donc

$\mathbf{p(G) = p(P \cap G) + p(\overline{P} \cap G)} = 0,06 + 0,8\ (1 - 0,2) = 0,06 + 0,8 \times 0,8 = \mathbf{0,06 + 0,64 = 0,7}$

2. Trois membres se présentent successivement et indépendamment les uns des autres.
On suppose que, pour chacun des trois, la probabilité qu'il joue au golf est 0,7.
On s'intéresse au nombre X de golfeurs parmi ces trois personnes.

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X. Justifier.

Pour chaque membre, il y a deux issues possibles : jouer au golf (le succès) de probabilité p = 0,7 et ne pas jouer au golf (l'échec), donc il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.

De plus, on répète 3 fois de suite cette épreuve de façon identique et indépendante donc on est en présence d'un schéma de Bernoulli.

Comme X est le nombre de succès (nombre de membres jouant au golf),

X suit la loi binomiale de paramètres n = 3 et p = 0,7.

b) Déterminer la probabilité que deux membres exactement jouent au golf.

$p\ (X = 2) = \binom{3}{2} \times 0,7^2 \times (1 - 0,7)$

$p\ (X = 2) = 3 \times (0,7)^2 \times 0,3$

$\mathbf{p\ (X = 2) = 0,441}$

c) Déterminer la probabilité qu'au moins un des trois membres ne joue pas au golf.

L'évènement : « au moins un des trois membres ne joue pas au golf » est l'évènement : « au plus deux des trois membres jouent au golf ».

L'événement contraire est l'évènement : « tous les membres jouent au golf », soit

$\mathbf{p(X \leq 2) = 1 - p\ (X = 3) = 1 - 0,7^3 = 0,657}$

d) Déterminer l'espérance mathématique et interpréter le résultat obtenu.

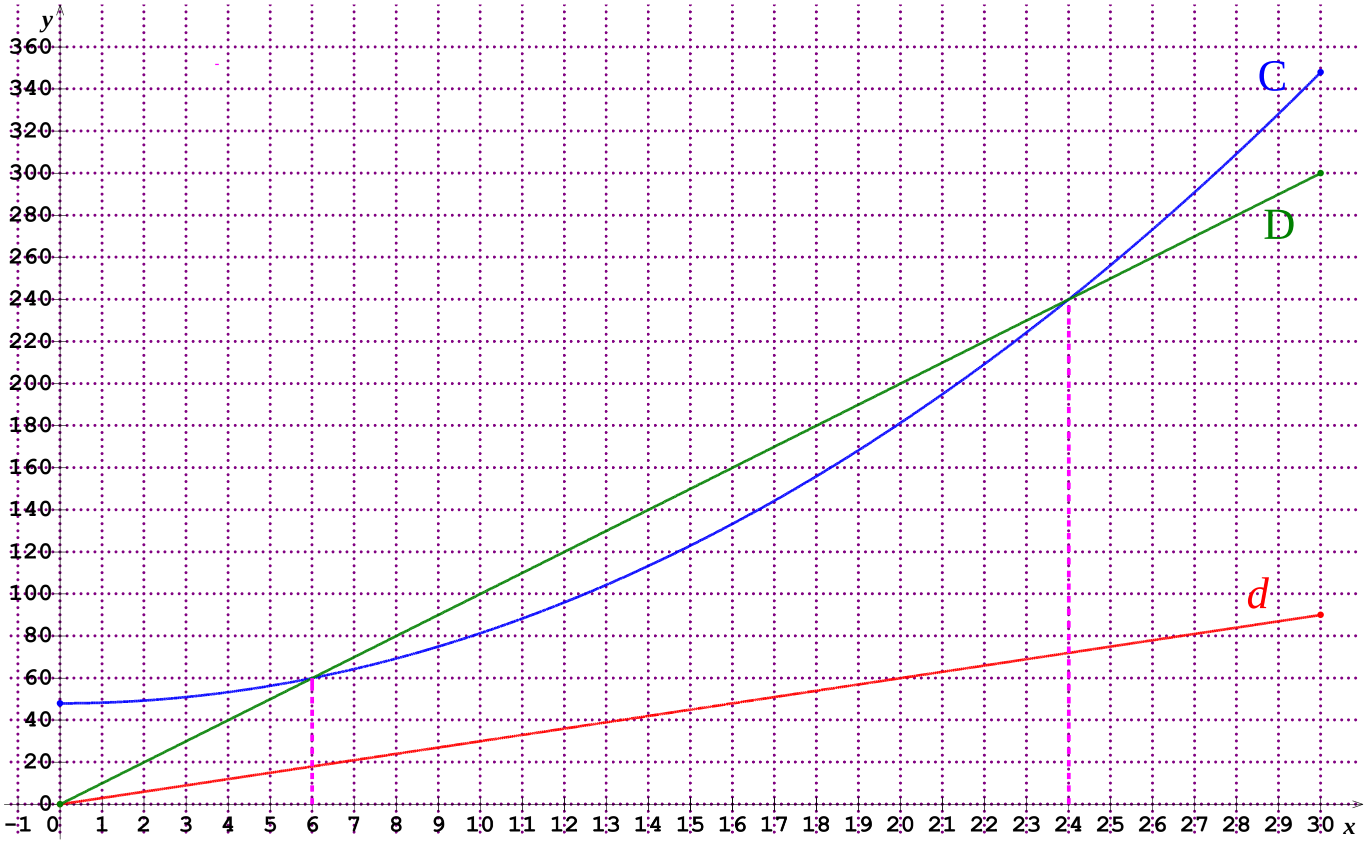
X suit la loi binomiale de paramètre 3 et 0,7 donc $\mathbf{E(X) = 3 \times 0,7 = 2,1}$

L'espérance étant égale à 2,1, ceci signifie que **le nombre moyen de golfeurs est de 2,1.**

EXERCICE 3. (11 *points*)

L'entreprise Cducosto est spécialisée dans la fabrication d'abris de jardin. Elle peut en fabriquer au maximum 30 par mois. On admet que tous les abris de jardin fabriqués sont vendus. Tous les montants sont ici exprimés en centaine d'euros. On a représenté trois fonctions sur le graphique donné en annexe pour x appartenant à l'intervalle [0 ; 30]

- La courbe (C) représente la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 48$ où x appartient à l'intervalle [0 ; 30] et exprime le coût total de fabrication de x abris de jardin par l'entreprise Cducosto.
- Le segment d représente la fonction r définie par $r(x) = 3x$ où x appartient à l'intervalle [0 ; 30] et exprime la recette réalisée pour la vente de x abris de jardin au prix unitaire de 300 euros.
- Le segment D représente sur [0 ; 30], la fonction R qui exprime la recette réalisée pour la vente de x abris de jardin au prix unitaire de 1000 euros.



1. A l'aide du graphique, expliquez pourquoi le choix d'un prix de vente unaire de 300 euros est un mauvais choix pour l'entreprise.

> **La droite *d* est constamment en dessous de la courbe (C)**, donc **la recette r (x) serait toujours inférieure au coût total de fabrication sur l'intervalle [0 ; 30]**, ce qui signifie que **l'entreprise serait toujours déficitaire.**

L'entreprise décide donc de vendre chaque abri 1000 euros.

2. a) Vérifier que R (25) = 250

> Le prix de vente d'un abri est 1000 euros, soit 10 centaines d'euros.
>
> Donc **R (25) = 25 × 10 = 250 centaines d'euros.**

b) Exprimer la recette R(x) ainsi réalisée en fonction de x.

> Le prix de vente d'un abri est 10 centaines d'euros, donc **R(x) = 10 x**

c) A l'aide du graphique, déterminer pour quel nombre n d'abris de jardins fabriqués et vendus, l'entreprise réalise un bénéfice.

> **La droite *D* est au-dessus de la courbe (C) sur l'intervalle]6 ; 24[(voir tracés sur le graphique)**, donc **l'entreprise réalise un bénéfice pour un nombre d'abris de jardins fabriqués et vendus, *n*, compris entre 7 et 23.**

3. Exprimer le bénéfice $B(x)$ en fonction de x.

$B(x) = R(x) - f(x)$

$B(x) = 10x - \left(\frac{1}{3}x^2 + 48\right)$

$\mathbf{B(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 10x - 48}$

4. Vérifier que $B'(x) = 10 - \frac{2}{3}x$

$\mathbf{B'(x) = -\frac{1}{3} \times 2x + 10 \times 1 - 0 = -\frac{2}{3}x + 10}$

5. Étudier les variations de la fonction B.

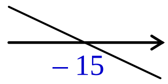
$$B'(x) = 0 \iff -\frac{2}{3}x + 10 = 0$$

$$\iff -\frac{2}{3}x = -10$$

$$\iff x = \frac{-10}{-\frac{2}{3}}$$

$$\iff x = 15$$

De plus $a = -\frac{2}{3}$, donc $a < 0$



x	0		15		30
Signe de $B'(x)$		+	0	–	
Variations de B	−48	↗	27	↘	−48

6. Déterminer le nombre d'abris de jardin que l'entreprise Cducosto doit fabriquer chaque mois pour réaliser un bénéfice maximal. Quel sera alors le montant de ce bénéfice maximal ?

Le bénéfice est maximal pour 15 abris de jardin fabriqués.

Ce bénéfice maximal est alors de 27 centaines d'euros, soit 2700 euros.