<u>Exercice 1</u> : (5 points)

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0.0001 près.
Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que, si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux, dont 1% est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

- Si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85% des cas
- Si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme des probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :

- M l'événement « l'animal est porteur de la maladie »
- T l'événement « le test est positif »

1) Construire un arbre pondéré modélisant la situation

2) Un animal est choisi au hasard.
a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0.058

3) Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

4) On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.
b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
c) On choisit n animaux au hasard. On note p_n la probabilité qu'au moins un des n animaux choisis ait un test positif. Quel nombre d'animaux faut-il choisir pour que p_n soit supérieur à 99% ?

<u>Exercice 4</u> : (6,5 points)

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\,;\,+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   c. Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.

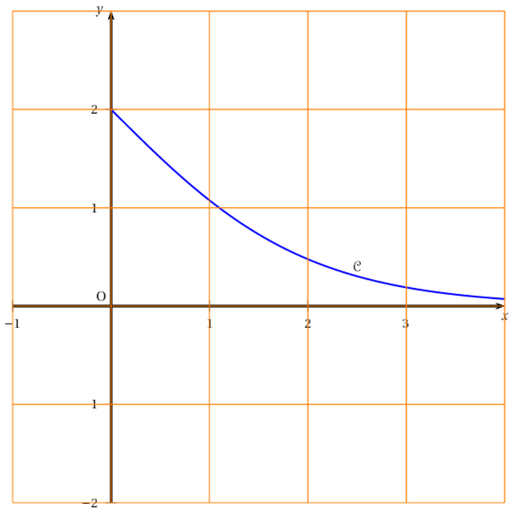
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x\,;\,f(x))$,

P le point de coordonnées $(x\,;\,0)$,

Q le point de coordonnées $(0\,;\,f(x))$.



1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. Le point M a pour abscisse α.

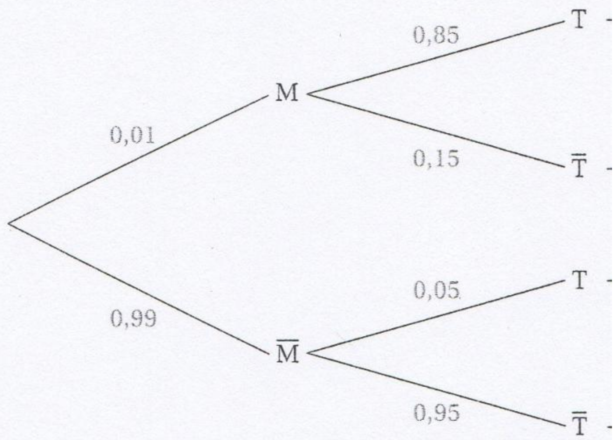
   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

CORRIGE

Exercice 1 :

1.



2. a. La probabilité qu'un animal choisi au hasard soit porteur de la maladie et que son test soit positif est la probabilité de la feuille (ou événement) $M \cap T$.
Or la probabilité d'une feuille est le produit des probabilités indiquées sur les branches du chemin qui aboutit à cette feuille.
Par suite, $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T)$
$= 0,01 \times 0,85 = 0,0085$.

b. La probabilité pour que le test soit positif est la probabilité de l'événement T. Cet événement est associé à deux feuilles : $M \cap T$ et $\overline{M} \cap T$.
Par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) \\ &= 0,0085 + P(\overline{M} \cap T) \\ &= 0,0085 + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,0085 + 0,99 \times 0,05 \\ &= 0,058 \end{aligned}$$

3. On doit calculer la probabilité que l'animal soit porteur de la maladie sachant que son test est positif. Autrement dit, $P_T(M)$.
Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0085}{0,058} \approx 0,1466$$

4. a. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = P(T) = 0,058$.

b. L'événement contraire de l'événement « au moins un des cinq animaux a un test positif » est l'événement « aucun des cinq animaux n'a un test positif ».
Ainsi la probabilité demandée est :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \times p^0 \times (1-p)^5 = 1 - (1-p)^5 \approx 0,2583$$

Exercice 4 :

1. On a $g(x) = \mathrm{e}^x(1-x)+1$.
   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$, donc par produit des limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
2. La fonction g somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur $[0\,;\,+\infty[$:
   $g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ et $x > 0$, on a $g'(x) < 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
   g est donc décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ de $g(0) = 2$ à $-\infty$.
3. Donner le tableau de variations de g.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	2 ↘	$-\infty$

4. **a.** Sur $[0\,;\,+\infty[$, g dérivable est donc continue et décroissante, $g(0) > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
   Il existe donc un réel unique $\alpha \in [0\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

   b. La calculatrice donne :
   - $g(1) = 1$ et $g(2) \approx -6,4$, donc $1 < \alpha < 2$;
   - $g(1,2) \approx 0,3$ et $g(1,3) \approx -0,1$, donc $1,2 < \alpha < 1,3$;
   - $g(1,27) \approx 0,04$ et $g(1,28) \approx -0,007$, donc $1,27 < \alpha < 1,28$.

   c. On a $g(\alpha) = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha + 1 = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha) = -1 \iff \mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

5. On a donc $g(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$;
   $g(\alpha) = 0$;
   $g(x) < 0$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

Partie 2

1. La fonction A quotient de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ (le dénominateur ne s'annulant pas) est dérivable et sur cet intervalle :
   $A'(x) = \dfrac{4(\mathrm{e}^x+1) - 4x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{4(\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1)}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{4g(x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.
   Comme $(\mathrm{e}^x+1)^2 > 0$ quel que soit x, le signe de $A'(x)$ est celui de $g(x)$.
   D'après la précédente question on a donc :
   $A'(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$;
   $A'(\alpha) = 0$;
   $A' < 0$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.
2. On a donc :
   $A(x)$ est croissante sur $[0\,;\,\alpha[$ et décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$, $A(\alpha)$ étant le maximum de la fonction.

Partie 3

1. On sait que $x \geqslant 0$, donc l'aire du rectangle $OPMQ$ est égale à $x \times f(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x+1} = A(x)$.
   Or on a vu que la fonction présente un maximum pour $x = \alpha$.

2. Le coefficient directeur de la droite (PQ) est égal à $-\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = -\dfrac{\frac{4}{\mathrm{e}^\alpha+1}}{\alpha} = -\dfrac{4}{\alpha(\mathrm{e}^\alpha+1)}$.
   Or on a vu que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$, donc le coefficient directeur est égal à :
   $-\dfrac{4}{\alpha(\mathrm{e}^\alpha+1)} = -\dfrac{4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha(1+\alpha-1)} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.
   La tangente en $M(\alpha\,;\,f(\alpha))$ a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.
   Or $f'(x) = -\dfrac{4\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$, donc
   $f'(\alpha) = -\dfrac{4\mathrm{e}^\alpha}{(\mathrm{e}^\alpha+1)^2} = -\dfrac{\frac{4}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^2} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{(1+\alpha-1)^2} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.
   Les coefficients directeurs sont égaux : les droites sont parallèles.