2nde _ _	**Eléments de correction du DNS 13 du 10 mars 2016**

Objectifs :

- *Prendre conscience de l'importance des connaissances, de l'analyse du sujet, en reprenant deux exercices de l'évaluation n°2*
- *Mathématiser une situation donnée*

Pur la plupart : refaire les deux exercices de l'évaluation en les rédigeant avec rigueur :

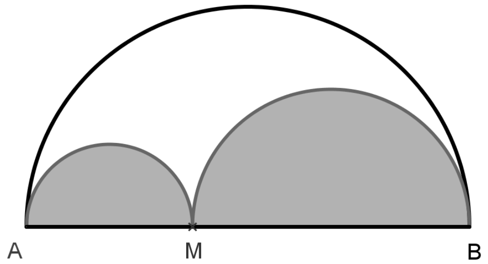
- Verres et volumes
- Baignade en eaux vives.

Cf corrigé de l'évaluation n°2

Pour ceux qui ont réussi les deux exercices de l'évaluation, voici un problème

Les lunules

Le point M appartient à [AB], on construit les demi-disques de diamètres [AB], [AM] et [MB].
On donne AB = 8.
On pose AM = $2x$ et on note $f(x)$ l'aire de la partie colorée.



1. a) A quel intervalle appartient x ?

M appartient à [AB], AB = 8 et AM = $2x$,
donc $0 \leq 2x \leq 8$ d'où $0 \leq x \leq 4$
$x \in [0 ; 4]$

b) Démontrer que $f(x) = \pi (x^2 - 4x + 8)$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AM}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{MB}{2}\right)^2$$ **(aire d'un disque = πR^2)**

Or, MB = AB – AM = 8 – $2x$

Donc, $$f(x) = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{2x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{8-2x}{2}\right)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{1}{2}\pi (4-x)^2$$

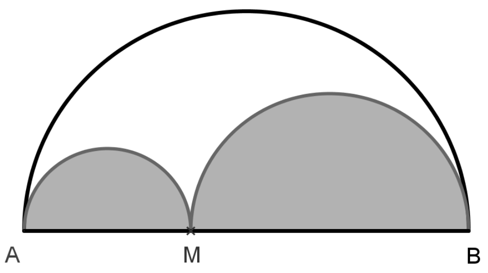
$$f(x) = \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{1}{2}\pi (16 - 8x + x^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\pi (x^2 + 16 - 8x + x^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\pi (2x^2 - 8x + 16)$$

$$f(x) = \pi (x^2 - 4x + 8).$$

c) L'aire de la partie colorée peut-elle être égale à celle de la partie blanche ? Justifier par le calcul.



Soit g(x) l'aire de la partie blanche.

$g(x) = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - f(x)$ (aire du demi-disque de diamètre [AB] – aire colorée)

On cherche s'il existe une valeur de x telle que :

$$g(x) = f(x) \iff \frac{1}{2}\pi \times 4^2 - f(x) = f(x)$$

$$\iff \frac{1}{2}\pi \times 4^2 - 2\,f(x) = 0$$

$$\iff 8\,\pi - 2\pi\,(x^2 - 4x + 8) = 0 \text{ et } x \in [0\,;4]$$

$$\iff 2\pi\,(4 - x^2 + 4x - 8) = 0 \text{ et } x \in [0\,;4]$$

$$\iff 2\pi\,(-x^2 + 4x - 4) = 0 \text{ et } x \in [0\,;4]$$

$$\iff -x^2 + 4x - 4 = 0 \text{ et } x \in [0\,;4]$$

$$\iff -(x-2)^2 = 0 \text{ et } x \in [0\,;4]$$

$$\iff x - 2 = 0 \text{ et } x \in [0\,;4]$$

$$\iff x = 2 \text{ et } x \in [0\,;4]$$

Lorsque x est égal à 2, les aires des parties blanches et colorées sont égales.

2. Calculer le périmètre de la partie blanche en fonction de x.
   Que constate-t-on ?

Soit h(x) le périmètre de la partie blanche en fonction de x.

$h(x) = \frac{1}{2}\pi \times AB + \frac{1}{2}\pi \times AM + \frac{1}{2}\pi \times MB$ (somme des longueurs des 3 demi-cercles)

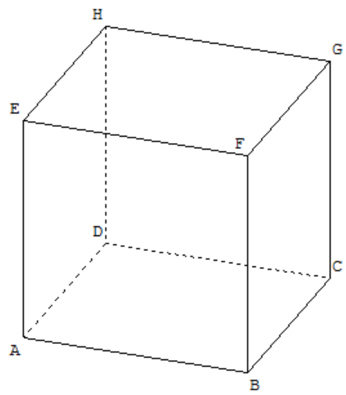
$$h(x) = \frac{1}{2}\pi \times 8 + \frac{1}{2}\pi \times 2x + \frac{1}{2}\pi\,(8 - 2x)$$

$$h(x) = \frac{1}{2}\pi\,(8 + 2x + 8 - 2x)$$

$$h(x) = 8\,\pi$$

On peut constater que ce périmètre est constant, quel que soit x.

Promenade d'une fourmi

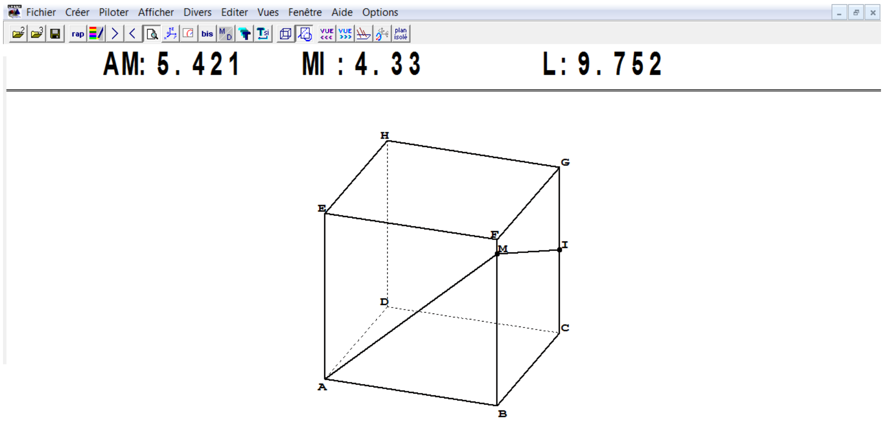


On considère un cube ABCDEFGH. I est le milieu de [CG].
Une fourmi placée initialement au point A, se déplace sur les faces ABFE et BCGF en ligne droite comme sur la figure ci-contre, de façon à rejoindre le point I.
On souhaite déterminer la position de M sur [BF] pour que son trajet AM + MI soit le plus court possible.

Partie 1 : Conjecture à l'aide d'un logiciel (ici Geospace)

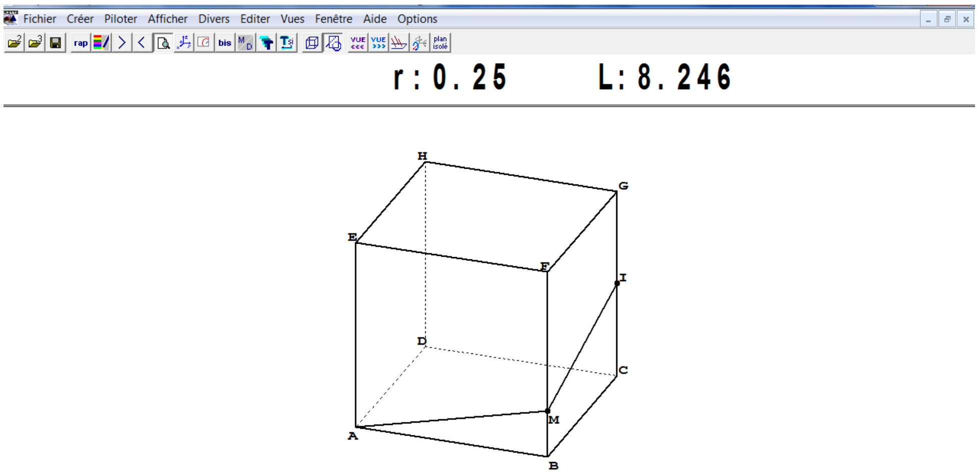
a) <u>Réaliser la figure</u> :

- Ouvrir Geospace/ ouvrir figure de l'espace/disque C/Programmes/GeoplanGeospace/Exemples/Espace/BasesEspace/cube2.g3w
- Placer le point I
- Placer M, libre sur [FB]
- Créer numérique/ calcul algébrique : AM+MI (on l'appellera L)
- Créer/Affichage/ variable numérique déjà définie
  1)



b) <u>Conjecturer alors la position de M de façon à répondre au problème posé</u>

Pour trouver la position de M (les positions de M) de façon à ce que la longueur L soit minimale, on a créé le rapport r = $\frac{BM}{BF}$



Il semble que la longueur L est minimale lorsque r = 0,25 soit lorsque le point M se trouve au quart du segment [BF] à partir du point B.

Partie 2 : Conjecture à l'aide d'une calculatrice après un travail algébrique

Dans cette partie, on travaille avec un cube de côté 10 cm.
On pose BM =x et f (x) = AM + MI

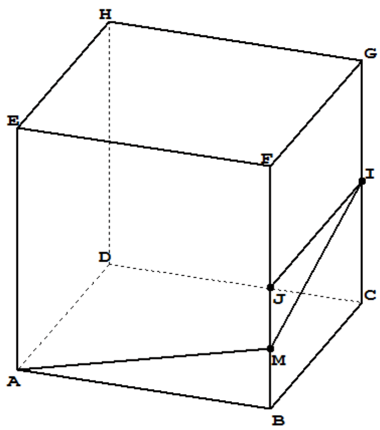
a) <u>Quelles sont les valeurs possibles pour x ?</u>
x est une longueur d'où $x \geq 0$. De plus, le cube est ici de côté 10 cm.
M est un point de l'arête [BF] et BM = x donc $x \leq 10$
<u>En conclusion</u> : **x appartient à [0 ;10]**

b) <u>Exprimer AM en fonction de x puis faire de même pour IM</u>.

- Le triangle ABM est rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore, on a :
  $AM^2 = AB^2 + BM^2$
  Or AB = 10 et BM= x donc $AM^2 = 100 + x^2$
  AM > 0 donc **AM = $\sqrt{100 + x^2}$**

- Pour trouver IM, on trace [IJ] où J est le milieu de [BF]

  Le triangle IJM est rectangle en J
  donc d'après le théorème de Pythagore, on a :
  $IM^2 = IJ^2 + JM^2$



Or IJ = 10 et JM= BJ – BM = 5 - x

Donc $IM^2 = 100 + (5 - x)^2 = 100 + (25 - 10x + x^2)$

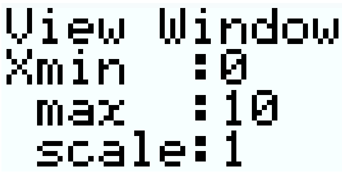
$IM^2 = 125 - 10x + x^2$

IM > 0 donc $\mathbf{IM = \sqrt{125 - 10x + x^2}}$

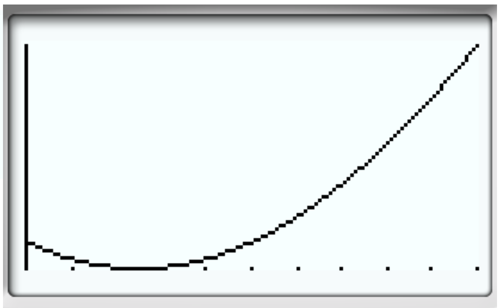
c) En déduire que $f(x) = \sqrt{x^2 + 10} + \sqrt{x^2 - 10x + 125}$

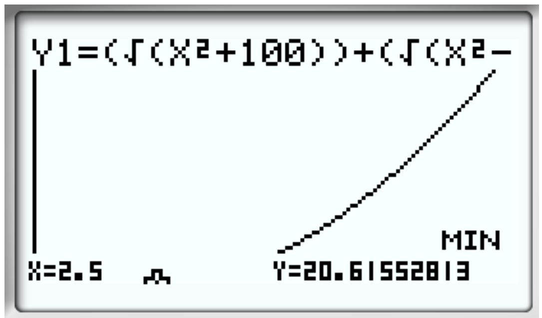
$f(x) = AM + IM = \mathbf{\sqrt{x^2 + 100} + \sqrt{x^2 - 10x + 125}}$

d) A l'aide de la calculatrice, conjecturer en quel réel f atteint son minimum.



Puis ZOOM AUTO





Partie 3 : Solution exacte grâce à un patron.

3)

Construire un patron du cube qui permet de trouver la position de M pour laquelle la distance AM + MI est minimale.

Placer le point M correspondant sur ce patron en expliquant votre méthode.