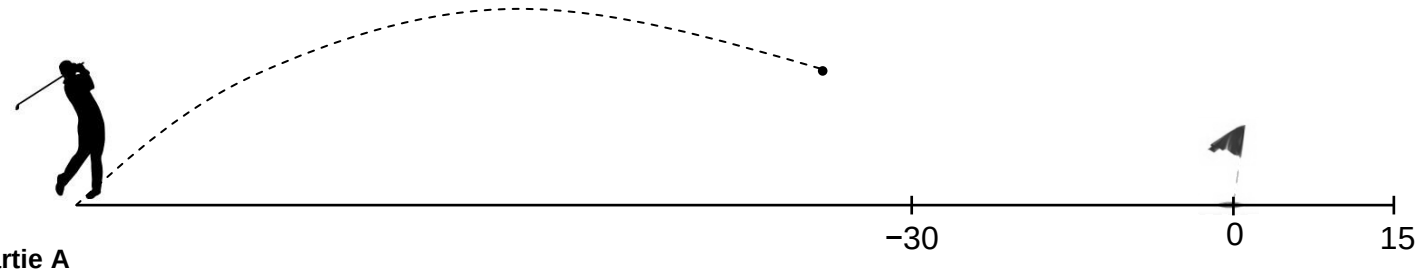
TS : Accompagnement Personnalisé en Mathématiques n°17
Soutien : Probabilités

Objectifs visés ce jour : probabilités conditionnelles, événements indépendants
schéma de Bernoulli et loi binomiale
loi de densité de probabilité, loi uniforme sur [a ;b]

Problème de synthèse :

Franck pratique régulièrement le golf. Lors d'un entraînement, il a effectué un nombre conséquent de coups à partir du même endroit. Dans le but de se perfectionner, il a relevé pour chaque coup la position de sa balle par rapport à l'objectif visé. Il est naturellement supposé qu'à chaque coup, la balle suit un mouvement rectiligne. Les distances relevées varient de −30 m (la balle est devant l'objectif visé, à 30 mètres de celui-ci) jusqu'à 15 m (la balle a dépassé l'objectif visé de 15 mètres) comme le montre le dessin ci-dessous.



Partie A

On considère la variable aléatoire *X* qui à chaque balle lancée par Franck associe sa position par rapport à l'objectif visé. On admet que cette variable aléatoire *X* suit la loi uniforme sur l'intervalle [−30 ; 15].

1. Quelle est la probabilité que Franck place sa balle devant l'objectif visé, à plus de cinq mètres de ce dernier ?
2. Franck a frappé fortement la balle. Quelle est la probabilité que cette balle soit derrière l'objectif visé ?
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire *X.* En donner une interprétation.
4. Lors d'une compétition, Franck est certain de gagner s'il place sa balle à au plus cinq mètres du trou. Quelle est la probabilité qu'il gagne la partie ?

Partie B

Après s'être longuement entraîné en vue d'une compétition, Franck estime qu'il a 40% de chances de placer sa balle à au plus 5 m du trou et que dans ce cas, il aura 90% de chance de gagner la partie.

S'il n'y parvient pas, il pense qu'il gagnera la partie dans seulement 20% des cas.

On note :

- *A* l'évènement : « Franck place la balle à au plus 5 m du trou » ;
- *G* l'évènement : « Franck gagne la partie ».

1. Traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a)** Calculer $p\,(A \cap G)$.

   b) Montrer que la probabilité que Franck gagne la partie est égale à 0,48.

   c) Franck a gagné la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait placé sa balle à plus de 5 m du trou ?

3. Franck joue 10 parties. On suppose que le nombre de parties est suffisamment grand pour assimiler ces parties à des tirages successifs indépendants avec remise. On note X le nombre de parties gagnées par Franck.

   a) Quelle loi suit la variable aléatoire X ?

   b) Calculer la probabilité que Franck gagne exactement 2 parties

4. Franck joue n parties. On suppose que le nombre de parties est suffisamment grand pour assimiler ces parties à des tirages successifs indépendants avec remise.
Combien de parties doit-il jouer pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9999 ?

Exercices indépendants :

1. *(d'après livre Odyssée TS)*
   Deux copains, Axel et Matthieu se connectent en réseau pour jouer en réseau.
   Matthieu ponctuel se connecte chaque soir à 19h tandis qu'Axel se connecte de manière aléatoire entre 19h et 19h30.
   a) Quelle est la probabilité qu'un soir, Matthieu attende plus de 10 minutes ?
   b) Un soir, Matthieu attend depuis 20 minutes. Agacé, il décide de se déconnecter dans les deux minutes qui suivent, si Axel n'est toujours pas connecté.
   Quelle est la probabilité qu'Axel et Matthieu jouent ensemble de soir-là ?

2. *(d'après livre Symbole TS)*
   On considère une expérience aléatoire consistant à prélever un nombre au hasard dans [– 2 ;8].
   a) On tire un nombre au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit négatif ?
   b) On tire 10 nombres au hasard dans des conditions identiques et indépendantes.
      - Quelle est la probabilité que ces 10 réels soient négatifs ?
      - Quelle est la probabilité que la moitié d'entre eux soient négatifs ?
      - Quelle est la probabilité que ces 10 réels soient positifs ?

3. *(d'après livre Transmath TS)*
   Une urne contient 5 boules blanches et cinq boules noires. On en prélève n ($n \geq 2$) au hasard et successivement, avec remise.
   a) Calculer les probabilités des événements suivants :
      - Toutes les boules tirées sont de même couleur
      - On obtient exactement une boule blanche
   b) On considère les événements suivants :
      A : « on obtient des boules de deux couleurs »
      B : « on obtient au plus une boule blanche »
      En déduire les probabilités suivantes : $p(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$, $p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$, $p(B) = \frac{n+1}{2^n}$
   c) Prouver que A et B sont indépendants
   d) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$
      - Calculer les trois premiers termes de cette suite
      - Prouver que cette suite est strictement croissante.
   e) Déduire alors la valeur de n pour que A et B soient indépendants.