1L spé math / 1ES	CORRIGE DE L'EVALUATION N°3 DE MATHEMATIQUES	Le 21/05/2015
Calculatrice autorisée.		Durée : 3h

Le barème est donné sur 50 points.

EXERCICE 1. (14 *points*) PROBLEME ECONOMIQUE

Un artisan fabrique des objets en bois qu'il propose ensuite aux touristes de passage.
Pour chaque semaine, il estime que le coût de production de x objets en euros est donné par :

$$C(x) = x^2 + 60x + 121 \quad \text{où } x \text{ est compris entre 1 et 50.}$$

PARTIE A

Le coût moyen de production d'un objet quand on en fabrique x est donné par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. Étudier les variations de la fonction C_M et dresser son tableau de variation.

$$\mathbf{C_M(x)} = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 + 60x + 121}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{60x}{x} + \frac{121}{x} = \mathbf{x + 60 + \frac{121}{x}}$$

$$\mathbf{C'_M(x)} = 1 + 0 + 121 \times \frac{-1}{x^2} = 1 - \frac{121}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{121}{x^2} = \mathbf{\frac{x^2 - 121}{x^2}}$$

$C'_M(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 121 = 0$ et $x \geq 1$

$\Leftrightarrow (x - 11)(x + 11) = 0$ et $x \geq 1$

$\Leftrightarrow x = 11$ ou $x = -11$ et $x \geq 1$

donc $C'_M(x) = 0$ si $x = 11$

x	1		11		50
Signe de $x^2 - 121$		–	0	+	
Signe de x^2		+		+	
Signe de $C'_M(x)$		–	0	+	
Variations de C_M	182	↘	82	↗	112,42

2. Combien d'objets l'artisan doit-il fabriquer chaque semaine, pour minimiser le coût moyen de production. Quel sera alors ce coût moyen minimal ?

Pour minimiser le coût moyen de production, l'artisan doit fabriquer 11 objets chaque semaine. Le coût moyen minimal sera alors de 82 euros.

PARTIE B

La courbe représentative de la fonction C est donnée dans le repère en annexe.

L'artisan vend chaque objet 110 €.

1. Déterminer l'expression de la recette, notée $R(x)$, réalisée lors de la vente de x objets.
Tracer la représentation graphique de la fonction R, dans le repère en annexe.

$R(x)$ est la recette en euros pour la vente de x objets, et l'artisan vend chaque objet 110 €, donc

$\mathbf{R(x) = 110\,x}$. R est une fonction affine, et sa représentation graphique est un segment de droite.

2. Montrer que le bénéfice réalisé après la fabrication et la vente de x objets en euros est donné par :

$B(x) = -x^2 + 50x - 121$ où x est supérieur ou égal à 1.

$B(x) = R(x) - C(x)$

$B(x) = 110\,x - (x^2 + 60x + 121)$

$B(x) = 110\,x - x^2 - 60x - 121$

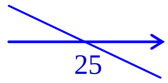
$\mathbf{B(x) = -x^2 + 50x - 121}$

3. Calculer $B'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction B.

$B'(x) = -2x + 50$

$B'(x) = 0 \iff -2x + 50 = 0$
$\iff 50 = 2x$
$\iff x = 25$

B′ est une fonction affine, qui s'annule en 25 ;

de plus : $a = -2$; $a < 0$, d'où 

x	1		25		50
Signe de $B'(x)$		+	0	–	
Variations de B	–72	↗	504	↘	–121

4. Résoudre algébriquement l'inéquation $B(x) > 0$.
En déduire le nombre d'objets à fabriquer et à vendre pour que l'entreprise soit rentable.

On étudie le signe du polynôme du second degré $B(x)$:

$\Delta = 50^2 - 4 \times (-1) \times (-121) = 2016$

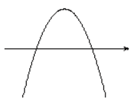
$\Delta > 0$, donc le polynôme a deux racines :

$x_1 = \dfrac{-50 - 4\sqrt{126}}{2 \times (-1)} = \mathbf{25 + 6\sqrt{14}}$

$x_2 = \dfrac{-50 + 4\sqrt{126}}{2 \times (-1)} = \mathbf{25 - 6\sqrt{14}}$

$x_1 \approx 47{,}4$

$x_2 \approx 2{,}6$

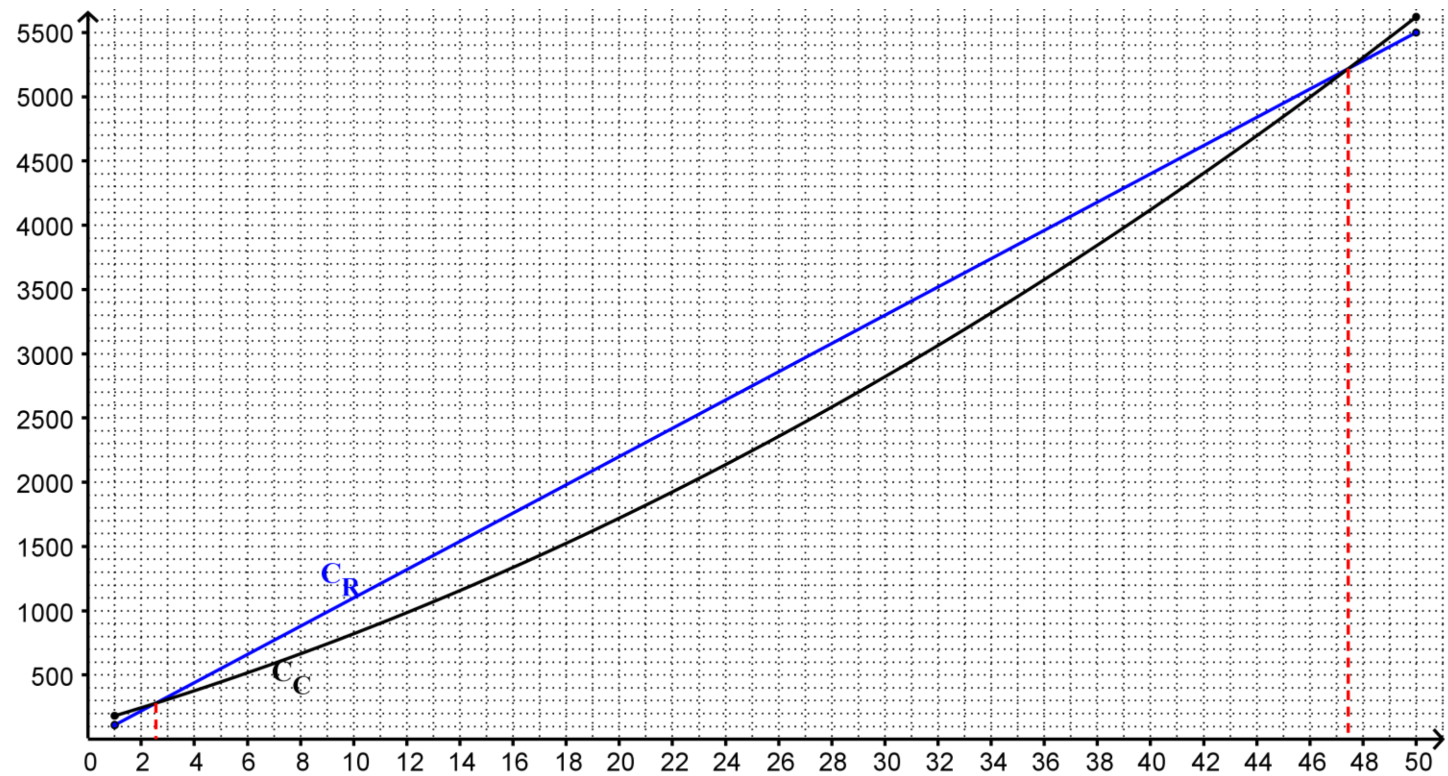
$a = -1$, $a < 0$, donc 

$B(x) > 0$ sur $]x_2 ; x_1[$

x	1		x_2		x_1		50
Signe de $B(x)$		–	0	+	0	–	

L'entreprise est donc rentable sur l'intervalle de production $]x_2 ; x_1[$, c'est-à-dire pour un nombre d'objets fabriqués et vendus compris entre 3 et 47 objets inclus.

ANNEXE EXERCICE 1



EXERCICE 2. (12 *points*) **SUITES.**

1. Le nombre d'abonnés d'un journal A était de 50 000 en 2008. Chaque année ce journal compte 2 500 abonnés de plus. On note u_n le nombre d'abonnés de l'année (2008 + n).

a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

Chaque année ce journal compte 2 500 abonnés de plus, donc **$u_{n+1} = u_n + 2\,500$**

b) En déduire la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n.

La suite (u_n) est arithmétique de raison a = 2 500 et de premier terme u_0 = 50 000.

On a donc : $u_n = u_0 + n \times a$ **$u_n = 50\,000 + 2\,500\, n$**

c) Quel sera le nombre d'abonnés de ce journal en 2017 ?

$u_9 = u_0 + 9 \times a = 50\,000 + 9 \times 2\,500$ **$u_9 = 72\,500$**

En 2017 ce journal aura 72 500 abonnés.

d) Déterminer par le calcul à partir de quelle année le nombre d'abonnés de ce journal dépassera 80 000.

On cherche n tel que $u_n > 80\,000 \iff 50\,000 + 2\,500\, n > 80\,000$

$$\iff 2\,500\, n > 30\,000$$
$$\iff n > \frac{30\,000}{2\,500}$$
$$\iff n > 12 \quad \text{et} \quad n \text{ est un entier donc } n \geq 13$$

Le nombre d'abonnés de ce journal dépassera 80 000 à partir de l'année 2021.

2. Pour le journal B, les affaires sont moins florissantes et il perd 2,4% de ses abonnés chaque année. En 2008, il comptait 100 000 abonnés. Soit v_n le nombre d'abonnés de l'année (2008 + n).

a) Combien y-avait-il d'abonnés en 2009 ?

$v_1 = 100\,000\left(1 - \frac{2{,}4}{100}\right) = 100\,000 \times 0{,}976$ **$v_1 = 97\,600$**

En 2009 ce journal avait 97 600 abonnés.

b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

Chaque année ce journal perd 2,4% de ses abonnés, donc **$v_{n+1} = v_n \times 0{,}976$**

c) En déduire la nature de la suite (v_n) puis exprimer v_n en fonction de n.

La suite (v_n) est géométrique de raison b = 0,976 et de premier terme v_0 = 100 000.

On a donc : $v_n = v_0 \times b^n$ **$v_n = 100\,000 \times 0{,}976^n$**

d) Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

$b = 0{,}976$ $\quad 0 < b < 1$ $\quad$ donc la suite ($0{,}976^n$) est décroissante

d'où $\quad 0{,}976^{n+1} < 0{,}976^n$

comme 100 000 > 0, alors $100\,000 \times 0{,}976^{n+1} < 100\,000 \times 0{,}976^n$

Par conséquent $v_{n+1} < v_n$ donc la suite (v_n) est décroissante.

3. En quelle année le nombre d'abonnés du journal A aura-t-il dépassé celui du journal B ?
Vous indiquerez la méthode utilisée et justifierez votre réponse.

Il s'agit de déterminer la valeur de n pour laquelle on aura :

$$\mathbf{u_n > v_n}$$

Soit : **$50\,000 + 2\,500\, n > 100\,000 \times 0{,}976^n$**

A l'aide de la table de la calculatrice, on obtient :

$u_{10} = 75\,000$ et $v_{10} \approx 78\,432$ soit $u_{10} < v_{10}$

$u_{11} = 77\,500$ et $v_{11} \approx 76\,550$ soit $u_{11} > v_{11}$

De plus, la suite (u_n) est arithmétique de raison a = 2 500, **a > 0, donc la suite (u_n) est croissante, et on a montré que la suite (v_n) est décroissante.**

Par conséquent, le nombre d'abonnés du journal A aura dépassé celui du journal B en 2019.

EXERCICE 3. (15 *points*) **PROBABILITES.**

Un producteur de fruits rouges propose en vente directe des framboises, des groseilles et des myrtilles.

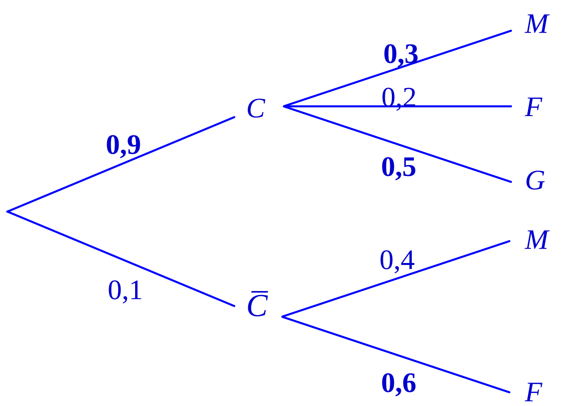
Le client peut acheter, soit des barquettes de fruits à déguster, soit des barquettes de fruits à confiture.

Le producteur a remarqué que, parmi ses clients, 9 sur 10 achètent une barquette de fruits à confiture. Lorsqu'un client achète une barquette de fruits à confiture, la probabilité qu'il demande une barquette de myrtilles est de 0,3 et la probabilité qu'il demande une barquette de groseilles est de 0,5. Lorsqu'un client achète une barquette de fruits à déguster, il ne demande jamais des groseilles et demande des framboises dans 60 % des cas.

Un client achète une barquette. On notera :

- C l'évènement « le client achète une barquette de fruits à confiture »,
- F l'évènement « le client demande des framboises »,
- G l'évènement « le client demande des groseilles »,
- M l'évènement « le client demande des myrtilles ».

1. Recopier l'arbre donné ci-dessous sur votre copie, reporter sur cet arbre les données de l'énoncé et le compléter.



Pour nommer les évènements, vous utiliserez les symboles d'intersection ou de réunion.

2. Calculer la probabilité que le client achète une barquette de fruits à confiture qui soient des framboises.

p $(C \cap F) = 0{,}9 \times (1 - 0{,}3 - 0{,}5) = 0{,}9 \times 0{,}2$ **p $(C \cap F) = 0{,}18$**

3. Calculer la probabilité que le client achète une barquette de framboises.

p $(F) = 0{,}18 + (1 - 0{,}9) \times 0{,}6 = 0{,}18 + 0{,}1 \times 0{,}6 = 0{,}18 + 0{,}06 = 0{,}24$ **p $(F) = 0{,}24$**

4. Le producteur vend 5 euros la barquette de fruits à confiture (quel que soit le fruit), 2 euros la barquette de framboises à déguster et 3 euros la barquette de myrtilles à déguster.

a. On note g_i les valeurs possibles, en euros, du gain, noté G, du producteur par barquette vendue et p_i leur probabilité.

Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité du gain G du producteur par barquette vendue. On justifiera les réponses.

On a : **p $(C) = 0{,}9$;** **p $(F \cap \overline{C}) = 0{,}1 \times 0{,}6 = 0{,}06$;** **p $(M \cap \overline{C}) = 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}04$**

Valeur g_i	5	2	3
Probabilité associée : p_i	**0,9**	**0,06**	**0,04**

b. Calculer l'espérance de cette loi de probabilité.

E(G) = $5 \times 0{,}9 + 2 \times 0{,}06 + 3 \times 0{,}04 = 4{,}74$

c. Déterminer le gain en euros que le producteur peut espérer pour 150 barquettes vendues ?

Le producteur peut espérer gagner 4,74 € pour 1 barquette, soit : 150 × 4,74 = **711 € pour 150 barquettes vendues.**

5. On admet que $p(F) = 0{,}24$. Dix clients se présentent successivement et indépendamment les uns des autres.
On note X, la variable aléatoire comptant le nombre de clients qui achètent des framboises.
Les probabilités demandées seront arrondies au millième.

a. Déterminer la loi de probabilité suivie par X.

Pour chaque client, il y a deux issues possibles : acheter des framboises (le succès), de probabilité $p = 0{,}24$, ou non, donc il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.

De plus, on répète 10 fois de suite cette épreuve de façon identique et indépendante donc on est en présence d'un schéma de Bernoulli.

Comme X est le nombre de succès (nombre de clients qui achètent des framboises),

X suit la loi binomiale de paramètres n = 10 et p = 0,24.

b. Calculer la probabilité que trois clients exactement achètent des framboises.

$$p\,(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0{,}24^3 \times (1 - 0{,}24)^7$$

$\mathbf{p\,(X = 3) \approx 0{,}243}$

c. Calculer la probabilité qu'au moins six clients achètent des framboises.

$p\,(X \geq 6) = 1 - p\,(X \leq 5)$

$p\,(X \geq 6) \approx 1 - 0{,}984$

$\mathbf{p\,(X \geq 6) \approx 0{,}016}$

d. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter le résultat obtenu.

X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,24 donc $\mathbf{E(X) = 10 \times 0{,}24 = 2{,}4}$

2,4 clients en moyenne achètent des framboises.

EXERCICE 4. (9 *points*) **QCM.**

Pour chaque ligne du tableau suivant, 3 réponses sont proposées, mais **une seule est exacte.**
Noter sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
1 point si la réponse est juste ; – 0,5 point si la réponse est fausse ; 0 point si pas de réponse.

1. En septembre 2009, la T.V.A. dans la restauration est passée de 19,6% à 5,5%. En août 2009, une brasserie proposait un menu à 12,70 € (T.V.A incluse). Le responsable a appliqué ce changement de T.V.A. Quel était en septembre 2009 le prix de ce menu après le changement de T.V.A. (arrondi au centime)?	***a)*** 10,91 €	***b)*** **11,20 €**	***c)*** 12,70 €
2. En septembre 2009, l'indice des prix à la consommation (IPC) a diminué de 0,2 %, après un accroissement de 0,5 % en août. En deux mois, l'IPC a augmenté de :	***a)*** 0,3% exactement	***b)*** **moins de 0,3%**	***c)*** plus de 0,3%
3. Le cours d'une action a baissé de 20%. Quel devra être le taux du pourcentage d'augmentation pour que cette action retrouve son cours initial ?	***a)*** **25**	***b)*** 20	***c)*** autre réponse

Le tableau suivant donne le salaire brut horaire, par catégorie socioprofessionnelle simplifiée dans le secteur de l'habillement, cuir :

	Ouvriers non qualifiés	Ouvriers qualifiés	Employés	Professions intermédiaires	Cadres
Salaire brut en €	9,4	10,6	11,8	16,2	32,0
Nombre de milliers d'heures	33 832	55 920	16 872	23 356	11 759

On rappelle la formule de la variance :

$$V(x) = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum n_i}$$

4. La variance V est environ égale à :	***a)*** 84,01	***b)*** **37,15**	***c)*** autre réponse

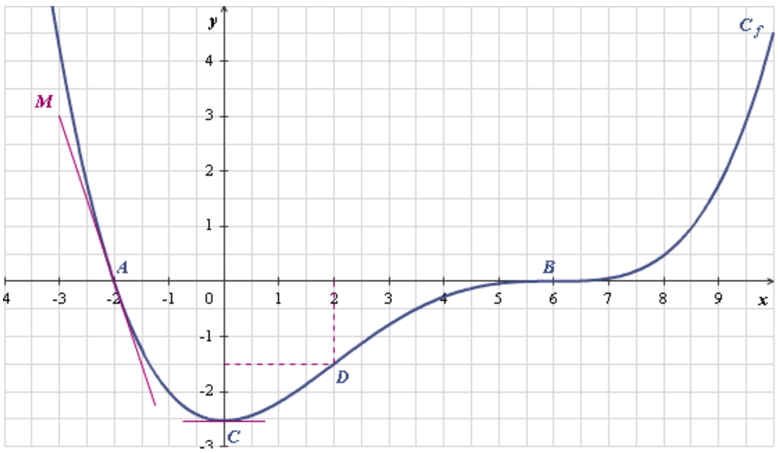
Le tableau de variations ci-contre est celui d'une fonction *f*.

x	0		8		$+\infty$
Variations de f	‖	↘	6	↗	

5. L'ensemble de définition de *f* est :	***a)*** **] 0 ; + ∞ [**	***b)*** [0 ; + ∞ [	***c)*** [6 ; + ∞ [
6. $f'(x) > 0$ sur l'intervalle :	***a)***] 0 ; 8 [	***b)*** [6 ; + ∞ [	***c)*** **] 8 ; + ∞ [**

Soit *f* une fonction définie et dérivable sur ℝ.
On note f' la fonction dérivée de *f*.
On donne ci-contre la courbe C_f représentant la fonction *f*.
La courbe C_f coupe l'axe des abscisses au point A (– 2 ; 0) et lui est tangente au point B d'abscisse 6.
La tangente à la courbe au point A passe par le point M (– 3 ;3).

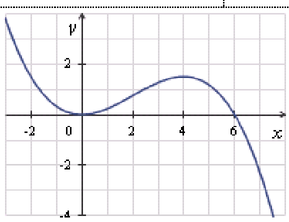
La courbe C_f admet une 2ème tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C d'abscisse 0.



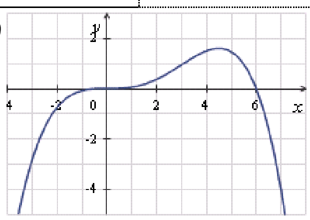
7. Une équation de la tangente (AM) est :	***a)*** $y = -3x - 6$	***b)*** $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$	***c)*** $-3x - 6$
8. L'équation $f'(x) = 0$ a pour solution :	***a)*** S = {– 2 ; 6}	***b)*** **S = {0 ; 6}**	***c)*** autre réponse

9. La représentation graphique de la fonction f' est la courbe :

a)



b)



c)