1L spé math - 1ES	**Corrigé du D.S. de Mathématiques n°4**	Vendredi 1er avril 2016 Durée : 1h45
Nom : ……………………..……………………………		**Calculatrice autorisée**

Le barème est donné sur 40 points à titre indicatif.

EXERCICE 1. (8,5 *points*)

Une usine de jouets fabrique des ours en peluche, on admet que la probabilité qu'un ours échoue au test de conformité concernant les exigences de sécurité est de 4%. On prélève un lot de 100 ours dans la production et on suppose que le stock est suffisamment grand pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise de 100 ours. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 ours en peluche, associe le nombre d'ours non conformes.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser les paramètres de cette loi.

Le test de conformité pour un ours choisi au hasard dans le stock, constitue une épreuve de Bernoulli, de probabilité de succès : « l'ours échoue au test », égale à 0,04.

Le stock étant suffisamment grand pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise de 100 ours, on répète 100 expériences de Bernoulli, identiques et indépendantes, donc le nombre d'ours non conformes, **X, suit la loi binomiale de paramètres n = 100 et p = 0,04.**

2. Calculer les probabilités des évènements suivants arrondies au millième.

a. le lot contient exactement 5 ours non conformes.

$$\mathbf{p(X = 5)} = \binom{100}{5} \times p^5 \times (1-p)^{95} = \binom{\mathbf{100}}{\mathbf{5}} \times \mathbf{0{,}04^5 \times 0{,}96^{95} \approx 0{,}160}$$

b. le lot contient au moins un ours non conforme.

$$\mathbf{p(X \geq 1)} = 1 - p(X = 0) = \mathbf{1 - 0{,}96^{100} \approx 0{,}983}$$

3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter ce résultat.

E(X) = np = 100 × 0,04 = 4

En moyenne, il y a 4 ours non conformes dans un lot de 100 ours.

EXERCICE 2. (9,5 *points*)

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un vaccin contre la grippe dont la demande est en augmentation. Au mois de septembre 2014, il fabriquait 12000 doses par mois. Il a décidé d'augmenter la fabrication de 1500 doses chaque mois par rapport au mois précédent.

On note u_n le nombre de vaccins, **en milliers**, fabriqués le nième mois suivant septembre 2014 et on pose

$u_0 = 12$.

1. Montrer que $u_1 = 13{,}5$.

La fabrication augmente de 1500 doses, soit 1,5 millier de doses, par rapport au mois précédent, donc

$\mathbf{u_1 = 12 + 1{,}5 = 13{,}5}$

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Chaque mois la fabrication augmente de 1500 doses, soit 1,5 millier de doses, par rapport au mois précédent, donc $\mathbf{u_{n+1} = u_n + 1{,}5}$

Par conséquent **(u_n) est une suite arithmétique.**

3. Exprimer u_n en fonction de n.

(u_n) est une suite arithmétique de raison 1,5 et de terme initial u_0 = 12, d'où :

$u_n = u_0 + n \times 1{,}5$

Donc $\mathbf{u_n = 12 + 1{,}5\, n}$

4. Calculer le nombre de vaccins fabriqués en mars 2015. Vous utiliserez la suite (u_n) pour justifier votre résultat.

La fabrication de mars 2015 correspond à u_6 :

$\boldsymbol{u_6} = u_0 + 6 \times 1{,}5 = 12 + 9 = \mathbf{21}$ **La fabrication de mars 2015 a été de 21 000 doses.**

5. À partir de quelle date la quantité de vaccins fabriqués chaque mois aura-t-elle doublée par rapport à la production initiale ? Mettre le problème en équation puis le résoudre.

On cherche n, tel que : $\boldsymbol{u_n = 2\, u_0}$, soit : $\mathbf{12 + 1{,}5\, n = 24}$

$$1{,}5\, n = 24 - 12$$

$$n = \frac{12}{1{,}5} = 8$$

La quantité fabriquée aura doublé au mois de mai 2015.

6. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	Saisir un nombre positif P	
Traitement :	Affecter la valeur 0 à la variable N	{initialisation}
	Affecter la valeur 12 à U	{initialisation}
	Tant que U < P	
	Affecter la valeur N + 1 à N	
	Affecter la valeur U + 1,5 à U	
	Fin de Tant que	
Sortie :	Afficher N	

a) Si on saisit P = 20 en entrée, qu'obtient-on en sortie par cet algorithme ?

N	0	1	2	3	4	5	6
U	12	13,5	15	16,5	18	19,5	21
U < P	oui	oui	oui	oui	oui	oui	non

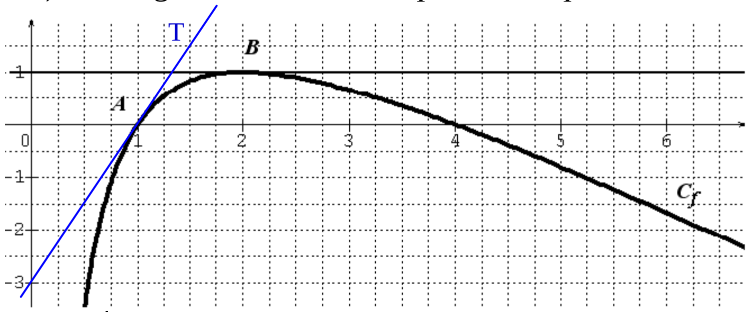
Si on saisit P = 20 en entrée, **on obtient 6** en sortie par cet algorithme.

b) Interpréter ce résultat dans le contexte de la fabrication de doses du vaccin.
Cela signifie que le nombre de vaccins passera dépassera 20 000 au bout de 6 mois.

EXERCICE 3. (14 *points*)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = -x + 5 - \dfrac{4}{x}$.

Sa courbe représentative, notée C_f, est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal. On note f' la dérivée de la fonction f.
La courbe C_f passe par les points A(1 ; 0) et B(2 ;1). La tangente à la courbe au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer $f'(2)$.

$\boldsymbol{f'(2) = 0}$ car la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 2, c'est-à-dire en B, est horizontale.

2. a) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2}$.

$$f'(x) = -1 + 0 - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -1 + \frac{4}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}$$

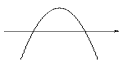
$$= \frac{4 - x^2}{x^2}$$

b) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

$4 - x^2 = 0$

$\Delta = 0^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 16$

$x_1 = \dfrac{-0 - \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = \dfrac{-4}{-2} = 2$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-0 + \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = \dfrac{4}{-2} = -2$

$a = -1$, $a < 0$ et $\Delta > 0$ donc 

x	**0**		**2**		**+ ∞**
Signe de $4 - x^2$	‖	+	**0**	–	
Signe de x^2	‖	+	|	+	
Signe de $f'(x)$	‖	+	**0**	–	
Variations de f	‖	↗	**1**	↘	

$f(2) = -2 + 5 - \dfrac{4}{2} = 3 - 2 = 1$

3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A.

T : $y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$

Or $\quad f'(1) = \dfrac{4 - 1^2}{1^2} = 3 \quad$ et $\quad f(1) = -1 + 5 - \dfrac{4}{1} = 0$

T : $y = 3(x - 1) + 0$

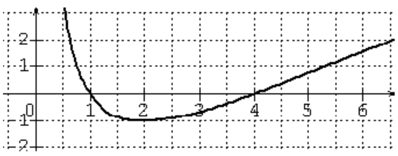
T : $\boldsymbol{y = 3x - 3}$

Tracer cette droite sur le graphique précédent.

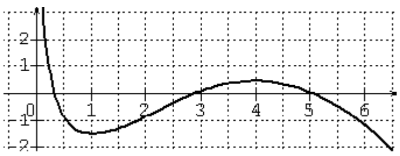
4. a) Par lecture graphique, déterminer le signe de $f(x)$ que l'on donnera sous forme d'un tableau.

x	0		1		4		+ ∞
Signe de $f(x)$	‖	–	0	+	0	–	

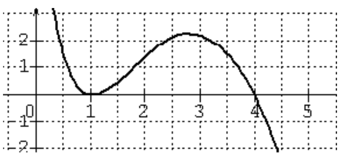
b) Des trois courbes représentées ci-dessous, quelle est celle qui est la représentation graphique d'une fonction F définie sur l'intervalle]0 ; + ∞[et ayant pour dérivée la fonction f. Justifier.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

D'après le tableau de signe de $f(x)$ de la question précédente, F est strictement décroissante sur]0 ; 1] puis strictement croissante sur [1 ; 4] puis strictement décroissante sur [4 ; + ∞[.

Par conséquent la courbe représentative de F est la **courbe 2**.

EXERCICE 4. (8 *points*)

Dans le Périgord, un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes de ce produit par semaine durant la période de production de la truffe. On désigne par x le nombre de kilogrammes de truffes traités chaque semaine et par f(x) le coût unitaire de revient en euros. Chaque kilogramme de truffes conditionné est vendu 450 euros. On admet dans la suite du problème, que la fonction f est définie sur] 0 ; 45] par $f(x) = x^2 – 60\,x + 975$

1. Déterminer le coût de production total C(x) pour x kilogrammes de truffes.

   $C(x) = x \times f(x) = x \times (x^2 – 60\,x + 975) = \mathbf{x^3 – 60\,x^2 + 975x}$

2. Vérifier que le bénéfice B(x) réalisé par le producteur pour x kilogrammes de truffes conditionnés et vendus est :

$$B(x) = – x^3 + 60x^2 – 525\,x$$

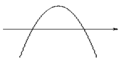
   $B(x) = R(x) – C(x)$
   $= 450\,x – (x^3 – 60\,x^2 + 975x)$
   $= 450\,x – x^3 + 60\,x^2 – 975x$
   $= – x^3 + 60x^2 – 525\,x$

3. Etudier les variations de la fonction B.

   $B'(x) = – 3x^2 + 60 \times 2x – 525 = – 3x^2 + 120\,x – 525$

   $\Delta = 120^2 – 4 \times (– 3) \times (–525) = 8\,100$

   $x_1 = \dfrac{– 120 – \sqrt{8\,100}}{2 \times (– 3)} = 35$ et $x_2 = \dfrac{– 120 + \sqrt{8\,100}}{2 \times (– 3)} = 5$

   $a = – 1$, $a < 0$ et $\Delta > 0$ donc 

x	0		5		35		45
Signe de B'(x)		–	0	+	0	–	
Variations de B	0 ↘		– 1 250	↗	12 250	↘	6 750

   $B(0) = – 0^3 + 60 \times 0^2 – 525 \times 0 = 0$

   $B(5) = – 5^3 + 60 \times 5^2 – 525 \times 5 = – 1\,250$

   $B(35) = – 35^3 + 60 \times 35^2 – 525 \times 35 = 12\,250$

   $B(45) = – 45^3 + 60 \times 45^2 – 525 \times 45 = 6\,750$

4. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?

   D'après le tableau de variations, le bénéfice maximal est atteint pour **35kg** de truffes. Ce bénéfice maximal est de **12 250€.**