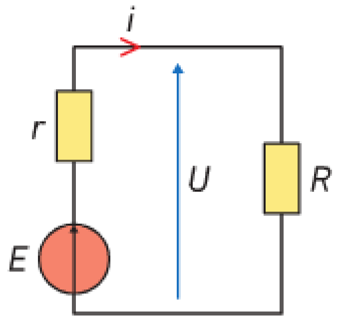
| 1S | CORRIGE DE L'EVALUATION N°3 DE MATHEMATIQUES | Jeudi 21 mai 2015 |
|---|---|---|
| | ***Durée : 3h*** | ***Calculatrice autorisée.*** |

***Le barème est donné à titre indicatif sur 60 points.***

## EXERCICE 1. (11 *points*)




Lorsqu'un générateur électrique de force électromotrice $E$ (en volts) et de résistance interne $r$ (en ohms) est relié à une résistance $R$, la force $E$ est égale à $E = (r + R)i$, où $i$ est l'intensité du courant (en ampères).

La puissance $P$ (en watts) délivrée par le générateur est définie par $P = R\,i^2$.

On donne $E = 10\ V$ et $r = 20\ \Omega$.

**1.** Exprimer $P$ en fonction de la seule variable $R$.

$E = 10\ V,\quad r = 20\ \Omega$ et $E = (r + R)i$ d'où $10 = (20 + R)i$

On en déduit que : $i = \dfrac{10}{20 + R}$

De plus $P = R\,i^2 = R\left(\dfrac{10}{20 + R}\right)^2$ soit $\boldsymbol{P = \dfrac{100\,R}{(20 + R)^2}}$

**2.** On considère la fonction $f$ définie sur $[0\ ;\ 50]$ par :

$$f(x) = \frac{100x}{(20 + x)^2}$$

**a.** Démontrer que pour tout $x$ appartenant à $[0\ ;\ 50]$, $f'(x) = \dfrac{100\,(20 - x)}{(20 + x)^3}$

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 100x$ donc $u'(x) = 100$

et $v(x) = (20 + x)^2$ donc $v = w^2$ et $v' = 2\,w'\,w$ avec $w(x) = 20 + x$ et $w' = 1$

d'où $v'(x) = 2 \times 1\,(20 + x) = 2\,(20 + x)$

$f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Donc $f'(x) = \dfrac{100\,(20 + x)^2 - 100x \times 2\,(20 + x)}{(20 + x)^4}$

$f'(x) = \dfrac{100\,(20 + x)\,(20 + x - x \times 2)}{(20 + x)^4}$

$f'(x) = \dfrac{100\,(20 + x)\,(20 - x)}{(20 + x)^4}$

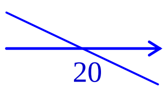
$\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{100\,(20 - x)}{(20 + x)^3}}$

**b.** Étudier les variations de la fonction $f$ et dresser son tableau de variation.

Comme $x \in [0\ ;\ 50]$, $20 + x > 0$, et par conséquent, $(20 + x)^3 > 0$.

De plus, $100 > 0$, donc $f'(x)$ sera du signe de $(20 - x)$.

Étude du signe de $20 - x$ : $20 - x = 0 \Leftrightarrow 20 = x$ et $a = -1$, donc $a < 0$, d'où




| $x$ | 0 | | 20 | | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | + | 0 | – | |
| Variations de $f$ | 0 | ↗ | 1,25 | ↘ | $\dfrac{50}{49}$ |

**3.** Pour quelle valeur de $R$ la puissance P est-elle maximale ?
Que vaut alors cette puissance ?

D'après la question 1., pour toute valeur de $R$ appartenant à $[0\ ;\ 50]$, $P = f(R)$, où $f$ est la fonction étudiée à la question 2.

**La puissance maximale est donc atteinte pour $R = 20\ \Omega$, et cette puissance maximale est de 1,25 watts.**

## EXERCICE 2. (11 *points*) PROBABILITES

Une entreprise fabrique des puces électroniques qui sont utilisées pour des matériels aussi différents que des téléphones portables, des lave-linge ou des automobiles.
À la sortie de fabrication, 5% d'entre elles présentent un défaut et sont donc éliminées. Les puces restantes sont livrées aux clients.
On dit qu'une puce a une durée de vie courte si cette durée de vie est inférieure ou égale à 1000 heures. On observe que 2% des puces livrées ont une durée de vie courte.

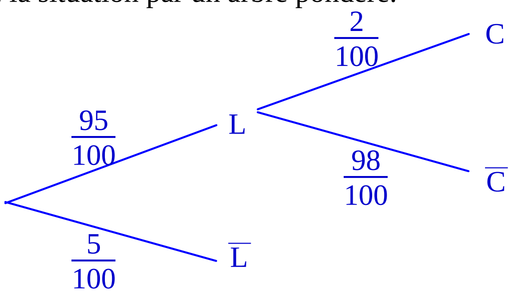
On note L l'évènement « La puce est livrée ».

On note C l'évènement « La puce a une durée de vie courte c'est-à-dire inférieure ou égale à 1000 heures ».

**Les questions 1 et 2 sont indépendantes.**

**1.** On tire au hasard une puce fabriquée par l'entreprise.

**a.** Traduire la situation par un arbre pondéré.




**b.** Calculer p(L ∩ C).

**$p(L \cap C) = 0,95 \times 0,02 = 0,019$**

**c.** Quelle est la probabilité que la puce soit livrée et ait une durée de vie strictement supérieure à 1000 heures ?

**$p(L \cap \overline{C}) = 0,95 \times 0,98 = 0,931$**

*Dans la suite de l'exercice on s'intéresse seulement aux puces livrées aux clients.*

**2.** Les ingénieurs de l'entreprise ont mis au point un nouveau procédé de fabrication. On suppose qu'avec ce nouveau procédé la probabilité qu'une puce livrée donnée ait une durée de vie courte est égale à 0,003.

On prélève au hasard 15 000 puces prêtes à être livrées. On admettra que ce prélèvement de 15 000 puces revient à effectuer un tirage avec remise de 15 000 puces parmi l'ensemble de toutes les puces électroniques produites par l'entreprise et prêtes à être livrées.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de puces ayant une vie courte dans cet échantillon.

**a.** Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et $p = 0,003$.

**Le choix d'une puce au hasard constitue une épreuve de Bernoulli**, de probabilité de succès (la puce a une durée de vie courte), $p = 0,003$.

**On répète de façon identique et indépendante, 15 000 fois cette épreuve**, donc **X suit la loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et $p = 0,003$.**

**b.** Calculer le nombre moyen de puces à durée de vie courte sur les 15 000 extraites de la production.

**E (X)** $= n\,p = 15\,000 \times 0,003$ **= 45**

**donc en moyenne, 45 puces auront une durée de vie courte.**

**c.** Calculer, à $10^{-3}$ près, la probabilité qu'exactement 50 puces sur les 15 000 prélevées aient une durée de vie courte. On justifiera la réponse par un calcul.

$$\boldsymbol{p\,(X = 50)} = \binom{15\,000}{50} \times 0,003^{50} \times (1 - 0,003)^{14950} \approx \mathbf{0,043}$$

**d.** Calculer, à $10^{-3}$ près, la probabilité $p\,(40 \leq X \leq 50)$. Interpréter ce résultat.

$p\,(40 \leq X \leq 50) = p\,(X \leq 50) - p\,(X < 40) = p\,(X \leq 50) - p\,(X \leq 39)$

$\boldsymbol{p\,(40 \leq X \leq 50)} \approx 0,7996 - 0,0208 \approx \mathbf{0,589}$

**La probabilité que, sur les 15 000 prélevées, entre 40 et 50 puces aient une durée de vie courte est de 0,589 environ.**

## EXERCICE 3. (17 *points*)

Un designer-graphiste a imaginé le logo ci-contre. Il est constitué de deux demi-cercles concentriques (c'est-à-dire de même centre) et d'une courbe.
L'objectif de cet exercice est de reproduire ce logo.

### A. Les demi-cercles

**1. a.** Dans le repère orthonormé $(0 ; \vec{i}, \vec{j})$, en annexe, placer les points A(5 ; 2) et B(− 1 ; 2) puis tracer le demi-cercle supérieur de diamètre [AB].

**b.** Donner une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB].

$$\begin{aligned} M(x ; y) \in C &\iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 5-x \\ 2-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1-x \\ 2-y \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (5-x) \times (-1-x) + (2-y) \times (2-y) = 0 \\ &\iff -5-5x+x+x^2+4-2y-2y+y^2 = 0 \\ &\iff \mathbf{x^2+y^2-4x-4y-1=0} \end{aligned}$$

**Une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB] est : $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$.**

**c.** Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de l'axe des ordonnées avec ce demi-cercle.

Soit D($x$ ; $y$) le point d'intersection de l'axe des ordonnées avec ce demi-cercle :

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y-1=0 \\ x=0 \end{cases} \iff y^2-4y-1=0$$

On résout l'équation : $y^2 - 4y - 1 = 0$

$\Delta = 20$ soit $y_1 = \dfrac{4-\sqrt{20}}{2} = 2-\sqrt{5}$ et $y_2 = \dfrac{4+\sqrt{20}}{2} = 2+\sqrt{5}$

On sait que l'ordonnée de D est positive, donc il s'agit de $y_2$.

Donc **D(0 ; 2 + $\sqrt{5}$)**

**2. a.** Sur la figure, placer le point C(4 ; 4), puis tracer le demi-cercle joignant les points C et O, correspondant au deuxième demi-cercle du logo.

**b.** Tracer la droite (T), tangente à ce demi-cercle au point O. Déterminer un vecteur directeur de (T).

La droite (T), tangente au demi-cercle de diamètre [CO] au point O est perpendiculaire en O au diamètre [CO], donc le vecteur $\overrightarrow{OC}$ est un vecteur normal à (T).

$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc une équation de (T) est $4x + 4y + c = 0$

On en déduit qu'**un vecteur directeur de (T) est : $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$**

### B. La courbe

On souhaite construire la base du logo avec un raccordement lisse en O.
Soit $f$ la fonction définie sur [0 ; 5] par $f(x) = -0{,}072x^3 + 0{,}64x^2 - x$.
On note $C_f$ la courbe représentant la fonction $f$.

**1.** Justifier que $C_f$ passe par les points O et A.

$\boldsymbol{f(0) = 0}$, donc le point O(0 ; 0) appartient à $C_f$.

$\boldsymbol{f(5)} = -0{,}072 \times 5^3 + 0{,}64 \times 5^2 - 5 = \mathbf{2}$, donc le point A(5 ; 2) appartient à $C_f$.

**2.** Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 0.

**Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 0 est le nombre dérivé de $f$ en 0.**

On détermine $f'(x) = -0{,}072 \times 3x^2 + 0{,}64 \times 2x - 1 = -0{,}216x^2 + 1{,}28x - 1$

donc $\boldsymbol{f'(0) = -1}$ **Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 0 est −1.**

**3.** Le raccordement en O est-il bien lisse ? Justifier.

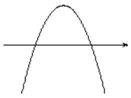
**Un vecteur directeur de la tangente à la courbe $C_f$ au point O est donc $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.**

Or le vecteur directeur de (T), **$\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$** ($\vec{u} = -4\,\vec{v}$), donc **la droite (T) et la tangente à la courbe $C_f$ au point O sont confondues, et par conséquent, le raccordement est bien lisse.**

**4.** Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle [0 ; 5].

On étudie le signe de $f\,'(x)$ :

$\Delta = 0{,}7744$ $\quad x_1 = \dfrac{-1{,}28 - \sqrt{0{,}7744}}{2(-0{,}216)} = 5$ $\quad x_2 = \dfrac{-1{,}28 + \sqrt{0{,}7744}}{2(-0{,}216)} = \dfrac{25}{27}$ $(\approx 0{,}93)$

De plus $a = -0{,}216$ $\quad a < 0$ $\quad$ donc 

| $x$ | 0 | | $\frac{25}{27}$ | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f\,'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 |
| Variations de $f$ | 0 | $\searrow$ | $f\left(\frac{25}{27}\right)$ | $\nearrow$ | 2 |

$f\left(\dfrac{25}{27}\right) = \dfrac{-950}{2187}$ $(\approx -0{,}43)$

**5.** Terminer le tracé du logo.

On utilise la table de valeurs de la calculatrice pour tracer la courbe de $f$ :

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | $-0{,}43$ | $-0{,}02$ | 0,82 | 1,63 | 2 |

## EXERCICE 4. (10 *points*)

Les bureaux d'une scierie sont installés à côté de l'atelier. Afin d'atténuer le bruit dû aux machines et de réduire la consommation d'énergie, on décide d'isoler phoniquement et thermiquement les cloisons. On colle sur chaque cloison deux plaques de Placoplatre BA13 entre lesquelles on insère des couches de mousse isolante.
Avant ces travaux d'isolation, l'intensité du bruit à l'intérieur des bureaux était de 100 décibels et la consommation annuelle de chauffage de 600 €.

Chaque plaque de Placoplatre BA13 diminue de 3 décibels l'intensité du bruit.
D'autre part, l'ajout d'une couche de mousse permet :

- de diminuer de 9 dB (décibel) l'intensité du bruit ;
- de réduire de 2,5 % la consommation annuelle de chauffage.

On ne peut pas insérer plus de 10 couches de mousse isolante entre les deux plaques de Placoplatre.
On appelle $n$ le nombre de couches de mousse isolante insérées.
Ainsi. $0 \leq n \leq 10$.
On note :

- $u_n$ l'intensité du bruit à l'intérieur du bureau, en décibel ;
- $v_n$ la consommation annuelle de chauffage, en euro.

**1.** Justifier que $u_0 = 94$ et préciser la valeur de $v_0$.

$u_0$ est l'intensité du bruit à l'intérieur du bureau, en décibel, après l'ajout de deux plaques de Placoplatre BA13, sans ajout de mousse isolante.

Chaque plaque de Placoplatre BA13 diminue de 3 décibels l'intensité du bruit, donc $u_0 = 100 - 2 \times 3 = 100 - 6$
$\boldsymbol{u_0 = 94}$

$v_0$ est la consommation annuelle de chauffage, en euro, avant les travaux, donc $\boldsymbol{v_0 = 600}$

**2.** **a.** Calculer $u_1$ et $u_2$.

$u_1$ est l'intensité du bruit à l'intérieur du bureau, en décibel, après ajout d'une couche de mousse isolante, donc $u_1 = u_0 - 9 = 94 - 9$ $\quad \boldsymbol{u_1 = 85}$

$u_2$ est l'intensité du bruit à l'intérieur du bureau, en décibel, après ajout d'une nouvelle couche de mousse isolante, donc $u_2 = u_1 - 9 = 85 - 9$ $\quad \boldsymbol{u_2 = 76}$

**b.** Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ?

L'ajout d'une couche de mousse permet de diminuer de 9 décibels l'intensité du bruit, donc $u_{n+1} = u_n - 9$.

**$(u_n)$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 94$ et raison a = − 9**

**c.** Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

$(u_n)$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 94$ et raison a = − 9 donc $u_n = u_0 + na$

$\boldsymbol{u_n = 94 - 9n}$

**d.** Le bruit à l'intérieur des bureaux sera acceptable si son intensité est inférieure à 50 décibels. Quel est le nombre minimal de couches à insérer pour que le bruit soit acceptable ?

On cherche $n$ tel que $u_n < 50$ : $\boldsymbol{94 - 9n < 50}$ $\Leftrightarrow$ $94 - 50 < 9n$

$\Leftrightarrow \dfrac{44}{9} < n$ et $n$ est un entier inférieur ou égal à 10,

donc $\boldsymbol{5 \leq n \leq 10}$

**Il faudra insérer au minimum 5 couches de mousse isolante pour que le bruit soit acceptable.**

**3. a.** Calculer $v_1$ et $v_2$.

$v_1$ est la consommation annuelle de chauffage, en euro, après ajout d'une couche de mousse isolante, donc $v_1 = v_0 \times \left(1 - \dfrac{2,5}{100}\right) = 600 \times 0,975$ $\boldsymbol{v_1 = 585}$

$v_2$ est la consommation annuelle de chauffage, en euro, après ajout d'une nouvelle couche de mousse isolante, donc $v_2 = v_1 \times 0,975 = 585 \times 0,975$ $\boldsymbol{v_2 = 570,375}$

**b.** Quelle est la nature de la suite $(v_n)$ ?

L'ajout d'une couche de mousse permet de réduire de 2,5 % la consommation annuelle de chauffage,

donc $\boldsymbol{v_{n+1}} = v_n \times \left(1 - \dfrac{2,5}{100}\right) = \boldsymbol{0,975\, v_n}$

**$(v_n)$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 600$ et raison b = 0,975**

**c.** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

$(v_n)$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 600$ et raison b = 0,975, donc $v_n = v_0 \times b^n$

$\boldsymbol{v_n = 600 \times 0,975^n}$

**d.** Quel est le nombre minimal de couches à insérer pour que la consommation annuelle de chauffage diminue d'au moins 20 % ?

On cherche $n$ tel que $\boldsymbol{v_n \leq v_0 \times \left(1 - \dfrac{20}{100}\right)}$ : $600 \times 0,975^n \leq 600 \times 0,8 \Leftrightarrow 0,975^n \leq 0,8$

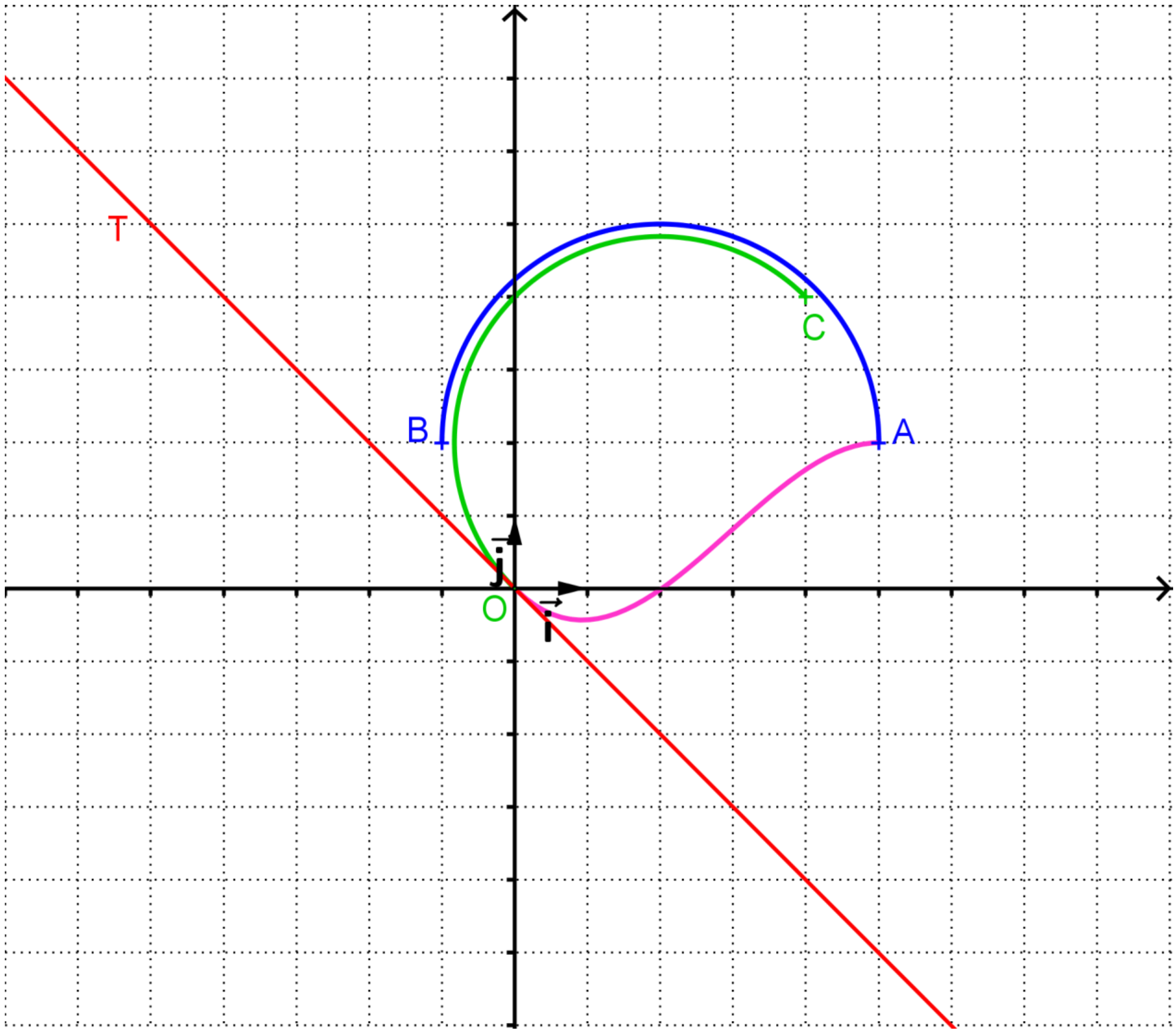
Avec le menu table de la calculatrice, on obtient :

$\boldsymbol{0,975^8 \approx 0,817}$ et $\boldsymbol{0,975^9 \approx 0,796}$ et **la suite $(0,975^n)$ est décroissante** $(0 < 0,975 < 1)$ donc $n \geq 9$.

Par conséquent, **il faudra insérer au moins 9 couches de mousse isolante, pour que la consommation annuelle de chauffage diminue d'au moins 20 %.**

***A rendre avec la copie***

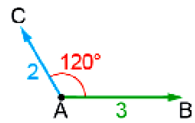
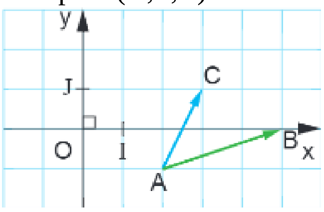
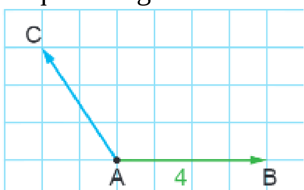
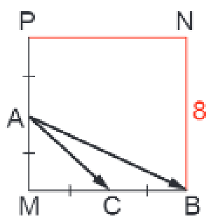
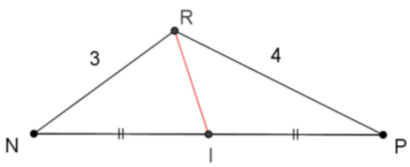
**ANNEXE EXERCICE 3**




**TOURNEZ SVP**

**EXERCICE 5.** (11 *points*) **Q.C.M.**

*Pour chaque ligne du tableau suivant, 3 réponses sont proposées, mais une seule est exacte.*
***Recopiez la lettre correspondant à la réponse choisie dans la dernière colonne du tableau.***

<table>
<tr><td>1. La variance de la série statistique est :<br><table><tr><td>Durée (en h)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>Effectif</td><td>5</td><td>6</td><td>15</td><td>22</td><td>8</td><td>16</td><td>5</td><td>2</td></tr></table></td><td>a) 2,8561</td><td>b) 1,6966</td><td>c) 2,8787</td><td>c</td></tr>
<tr><td>2. Dans IR, l'inéquation $|x - 3| \geq 2$ a pour ensemble solution :</td><td>a) $]-\infty\,;-5]\cup[5\,;+\infty[$</td><td>b) $]-\infty\,;1]\cup[5\,;+\infty[$</td><td>c) $]-\infty\,;3[\cup[5\,;+\infty[$</td><td>b</td></tr>
<tr><td>3. Dans $]-\pi\,;\pi]$, l'inéquation $\sin(x) < -\frac{1}{2}$ a pour ensemble solution :</td><td>a) $]\frac{5\pi}{6}\,;\frac{11\pi}{6}[$</td><td>b) $]-\frac{5\pi}{6}\,;-\frac{\pi}{6}[$</td><td>c) $]-\frac{\pi}{6}\,;0[\cup]\frac{5\pi}{6}\,;2\pi[$</td><td>b</td></tr>
<tr><td>4. t étant un nombre réel, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ est égal à :</td><td>a) cos(t)</td><td>b) sin(t)</td><td>c) – sin(t)</td><td>c</td></tr>
<tr><td>5. Si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ $(2\pi)$, alors :</td><td>a) $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AC}$ où $k > 0$</td><td>b) C = D</td><td>c) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \pi\ (2\pi)$</td><td>a</td></tr>
<tr><td>6.<br><br>$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$</td><td>a) 3</td><td>b) – 3</td><td>c) – 6</td><td>b</td></tr>
<tr><td>7. Le repère (O, I, J) est orthonormé.<br><br>$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$</td><td>a) 5</td><td>b) 1</td><td>c) 3</td><td>a</td></tr>
<tr><td>8. Le quadrillage est orthonormé<br><br>$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$</td><td>a) $4\sqrt{13}$</td><td>b) 8</td><td>c) – 8</td><td>c</td></tr>
<tr><td>9. MBNP est un carré<br><br>$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$</td><td>a) 48</td><td>b) 32</td><td>c) 16</td><td>a</td></tr>
<tr><td>10. NP = 6<br><br>RI =</td><td>a) $\sqrt{8}$</td><td>b) $\sqrt{\frac{7}{2}}$</td><td>c) $\sqrt{\frac{43}{2}}$</td><td>b</td></tr>
<tr><td>11. L'équation d'un cercle est</td><td>a) $x^2 + 3x + y - 3 = 0$</td><td>b) $3x + y - 3 = 0$</td><td>c) $x^2 + 3x + y^2 - y - 3 = 0$</td><td>c</td></tr>
</table>