

Corrigé du D.S de Mathématiques n°1

Nom :

Calculatrice autorisée

Durée : 1 h 45

Le barème est donné à titre indicatif sur 40.

EXERCICE 1 (8 points) **POURCENTAGES** Dans cet exercice, les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. 67% du territoire du Japon est boisé alors que 28% seulement du territoire de la France est boisé.

Au Japon, il y a environ 100 000 km² de surface boisée de plus qu'en France.

La superficie de la France est 550 000 km²

- a) Quelle est la superficie boisée de la France ?

$$28\% \text{ de la superficie de la France est boisée : } \frac{28}{100} \times 550\,000 = 154\,000$$

La superficie boisée de la France représente 154 000 km².

- b) Quelle est la superficie boisée du Japon ?

Au Japon, il y a environ 100 000 km² de surface boisée de plus qu'en France, soit :

$$154\,000 + 100\,000 = 254\,000$$

La superficie boisée du Japon représente 254 000 km²

- c) En déduire la superficie du Japon.

Soit A la superficie du Japon. 67% du territoire du Japon est boisé, donc

$$\frac{67}{100} \times A = 254\,000 \Leftrightarrow A = \frac{254\,000}{0,67} \Leftrightarrow A \approx 379\,104$$

La superficie du Japon est d'environ 379 104 km².

2. En 2007, 49% des ménages français ont une connexion Internet, dont 86% de type ADSL. Quel était le pourcentage des ménages français équipés d'une connexion ADSL ?

86% des 49% des ménages français ont une connexion ADSL : $0,86 \times 0,49 = 0,4214$

En 2007, 42,14% des ménages français étaient équipés d'une connexion Internet de type ADSL.

3. Dans une classe il y a 46,875% de filles. 40% des filles soit 6 élèves étudient une troisième langue. Quel est l'effectif de cette classe ?

Soit N l'effectif total de la classe.

Comme 6 élèves représentent 40% de 46,875% de l'effectif total N :

$$\frac{40}{100} \times \frac{46,875}{100} \times N = 6 \Leftrightarrow 0,1875 \times N = 6 \Leftrightarrow N = \frac{6}{0,1875} \Leftrightarrow N = 32$$

Il y a 32 élèves dans cette classe.

EXERCICE 2 (6 points) **COEFFICIENT MULTIPLICATEUR ET TAUX D'EVOLUTION.**

Dans cet exercice, les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Un prix subit une hausse de 23 %. Quel est le coefficient multiplicateur associé à cette évolution ?

$$CM = 1 + \frac{23}{100} = 1,23$$

2. Un prix est multiplié par 0,87. Quel est son pourcentage d'évolution ?

$$t = (CM - 1) \times 100 = (0,87 - 1) \times 100 = -13. \quad \text{Il y a une diminution de 13 \%}$$

3. Un restaurant a reçu 3 250 clients en 2012 et 8 905 clients en 2014.

- a) Calculer le taux d'évolution, en pourcentage, entre 2012 et 2014.

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100 = \frac{8\,905 - 3\,250}{3\,250} \times 100 = 174 \quad \text{Il y a une augmentation de 174 \%}$$

- b) Par quel coefficient le nombre de clients a-t-il été multiplié entre 2012 et 2014.

$$CM = 1 + \frac{t}{100} = 1 + \frac{174}{100} = 2,74$$

EXERCICE 3 (5,5 points) **EVOLUTION D'UNE RECETTE.**

Un article de grande consommation est vendu au prix de 2,5 € le kg.

Il s'en vend 430 kg durant le premier mois.

Le mois suivant, le prix diminue de 10 % et les quantités vendues augmentent de 15 %.

1. Calculer la recette pour le premier mois.

$$2,5 \times 430 = 1075$$

La recette du premier mois est de 1075 €.

2. Calculer la recette pour le second mois.

$$2,5 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 2,25$$

Le prix est de 2,25 € le kg le deuxième mois.

$$430 \times \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 494,5$$

Il y a eu 494,5 kg de produit vendu le deuxième mois.

$$2,25 \times 494,5 = 1112,625$$

La recette du deuxième mois est de 1112,63 €.

3. Calculer le pourcentage d'évolution de la recette.

$$\frac{1112,625 - 1075}{1075} \times 100 = 3,5$$

La recette a augmenté de 3,5 %.

EXERCICE 4 (5 points) **TVA**

Le taux de TVA applicable aux tarifs d'entrée des parcs d'attraction est passé de 7% à 10% le 1^{er} janvier 2014. Le prix d'entrée d'un parc était de 25€ par adulte en décembre 2013.

Calculer le nouveau tarif en janvier 2014, arrondi au centime.

$$\text{Prix TTC}_{2013} = \text{Prix HT} \times \left(1 + \frac{7}{100}\right) \quad \text{donc} \quad 25 = \text{Prix HT} \times 1,07$$

$$\text{Par conséquent, Prix HT} = \frac{25}{1,07}$$

$$\text{D'où Prix TTC}_{2014} = \text{Prix HT} \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = \frac{25}{1,07} \times 1,1 \approx 25,70$$

Le nouveau tarif en janvier 2014 est 25,70 €.

EXERCICE 5 (7 points) **EQUATIONS DU SECOND DEGRE**

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$$a = 9 \quad b = -6 \quad c = 1$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(9)(1) = 0$$

$\Delta = 0$ donc l'équation $9x^2 - 6x + 1 = 0$ admet une solution réelle :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{S} = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

2. $-2x^2 + 11x - 12 = 0$

$$a = -2 \quad b = 11 \quad c = -12$$

$$\Delta = 11^2 - 4 \times (-2) \times (-12) = 25$$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-11 - \sqrt{25}}{2 \times (-2)} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-11 + \sqrt{25}}{2 \times (-2)}$$

$$x_1 = \frac{-11 - 5}{-4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-11 + 5}{-4}$$

$$x_1 = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{S} = \left\{ \frac{3}{2}; 4 \right\}$$

3. $3x^2 + x + 1 = 0$

$$a = 3 \quad b = 1 \quad c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 3 \times 1 = 1 - 12 = -11$$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution réelle

$$\mathbf{S} = \emptyset$$

EXERCICE 6 (6 points) **SECOND DEGRE : DIFFERENTES FORMES**

Une entreprise fabrique et vend des boites de biscuits.

Pour x **centaines** de boites vendues, le bénéfice réalisé en euros est donné par la fonction B définie sur $[0 ; 200]$ par : $B(x) = -2x^2 + 252x - 2736$.

On a obtenu, à l'aide d'un logiciel de calcul formel la forme canonique et la forme factorisée de B.

1	FormeCanonique[-2x ² +252x-2736]
<input type="radio"/>	→ -2 (x - 63) ² + 5202
2	Factoriser[-2x ² +252x-2736]
<input type="radio"/>	→ -2 (x - 114) (x - 12)

Répondre aux questions suivantes en choisissant **la forme la plus adaptée**.

1. Quel est le montant des coûts lorsque la production est nulle ?

On utilise la **forme développée** : $B(0) = c = -2\ 736$.

Le montant des coûts lorsque la production est nulle s'élève donc à 2 736 €.

2. Pour quelle production le bénéfice est-il maximal ? Quel est alors la valeur de ce bénéfice.

On utilise la **forme canonique** : $B(x) = -2 (x - 63)^2 + 5\ 202 = a (x - \alpha)^2 + \beta$

$a = -2$, $a < 0$ donc la fonction B est donc croissante puis décroissante. Par conséquent, elle admet un maximum qui vaut $\beta = 5\ 202$ et qui est atteint en $\alpha = 63$.

Le bénéfice est maximum pour 6 300 boites vendues et ce bénéfice maximum est de 5 202 €.

3. Pour quelle(s) production(s) le bénéfice est-il nul ?

On utilise la **forme factorisée** : $B(x) = -2 \times (x - 114) \times (x - 12)$

$$B(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \times (x - 114) \times (x - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x - 114 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 114 \quad \text{ou} \quad x = 12$$

Le bénéfice est nul pour 1 200 boites vendues et 11 400 boites vendues.

EXERCICE 7 (2,5 points) **PROBLEME DU SECOND DEGRE**

Des biologistes étudient l'impact d'un bactéricide sur une culture de bactéries. Ils estiment que le nombre de bactéries présentes dans la culture en fonction du temps t (en minutes) est donné par :

$$N(t) = -5t^2 + 50t + 1\ 000.$$

Combien de temps faut-il pour tuer l'ensemble des bactéries ?

$$N(t) = 0$$

$$-5t^2 + 50t + 1\ 000 = 0$$

$$a = -5 \quad b = 50 \quad c = 1\ 000$$

$$\Delta = 50^2 - 4 \times (-5) \times 1\ 000 = 22\ 500$$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$t_1 = \frac{-50 - \sqrt{22500}}{2 \times (-5)} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-50 + \sqrt{22500}}{2 \times (-5)}$$

$$t_1 = \frac{-50 - 150}{-10} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-50 + 150}{-10}$$

$$t_1 = 20 \quad \text{et} \quad t_2 = -10$$

t étant un temps, il ne peut être négatif, donc il faut **20 minutes** pour tuer l'ensemble des bactéries.