1ES/1L Spé	**Corrigé du D.S. n°2 de Mathématiques**	Le 25 Novembre 2016
Nom : …………………………..……………………………………………..		**Calculatrice autorisée** Durée : 1 h 40

Le barème est donné à titre indicatif sur 40 points.

Le devoir est à rédiger <u>entièrement</u> sur le sujet.

EXERCICE 1 (8,5 *points*) POURCENTAGES

Deux entreprises avaient le même nombre de salariés en 2012.

La première a augmenté ses effectifs de 3% en 2013 puis elle a licencié 5% de ses salariés en 2014.

La deuxième a débauché 20% de ses salariés en 2013 puis a augmenté l'effectif de son personnel de 22% en 2014.

1. Calculer le taux d'évolution global du nombre de salariés pour chacune de ces 2 entreprises entre 2012 et 2014. Dans quelle entreprise le personnel est-il le plus nombreux en 2014 ?

Le personnel de la première entreprise a été multiplié par :

$\mathbf{CM_1} = (1 + \frac{3}{100}) \times (1 - \frac{5}{100}) = 1{,}03 \times 0{,}95 = \mathbf{0{,}9785}$

$\mathbf{t_1} = (CM_1 - 1) \times 100 = (0{,}9785 - 1) \times 100 = \mathbf{-2{,}15}$

Le personnel de la deuxième entreprise a été multiplié par :

$\mathbf{CM_2} = (1 - \frac{20}{100}) \times (1 + \frac{22}{100}) = 0{,}8 \times 1{,}22 = \mathbf{0{,}976}$

$\mathbf{t_2} = (CM_2 - 1) \times 100 = (0{,}976 - 1) \times 100 = \mathbf{-2{,}4}$

Le personnel de la première entreprise a diminué de 2,15%, alors que celui de la deuxième entreprise a diminué de 2,4%.

C'est donc dans la première entreprise que le personnel est le plus nombreux en 2014.

2. Quelle devrait-être l'évolution à 0,01% près du nombre d'employés en 2015 dans la première entreprise pour revenir au nombre de salariés de 2012.

Soit $t_{réc}$ ce taux d'évolution : $\mathbf{t_{réc}} = \left(\frac{1}{CM_1} - 1\right) \times 100 = \left(\frac{1}{0{,}9785} - 1\right) \times 100 \approx \mathbf{2{,}197}$

Le nombre d'employés dans la première entreprise devrait augmenter d'environ 2,20% en 2015 pour revenir au nombre de salariés de 2012.

EXERCICE 2 (16 *points*) COMPARAISON DE DEUX SERIES STATISTIQUES (13 points)

Partie 1

Dans le réseau ferroviaire français, les trains «Grandes lignes » sont de deux types : Corail ou TGV (Train à Grande Vitesse) et l'on propose aux clients de voyager en seconde ou en première classe.

Une enquête est réalisée dans une gare de province durant la première semaine du mois de juillet 2006.

Sur les 2 450 billets vendus, 82% sont des billets de seconde classe.

Sur les 850 billets TGV vendus, 14% sont des billets de première classe.

1. Compléter le tableau suivant :

$\frac{14}{100} \times 850 = 119$

	Billets Corail	**Billets TGV**	**Total**
Billets Première Classe	322	**119**	441
Billets Seconde Classe	1278	731	**2009**
Total	1600	850	2450

$\frac{82}{100} \times 2450 = 2009$

2. Calculer le pourcentage des billets de première classe parmi les billets Corail vendus durant la première semaine du mois de juillet 2006. (On arrondira à l'unité).

$\frac{322}{1600} \times 100 = 20{,}125$ **Il ya donc eu environ 20% de billets de première classe parmi les billets Corail.**

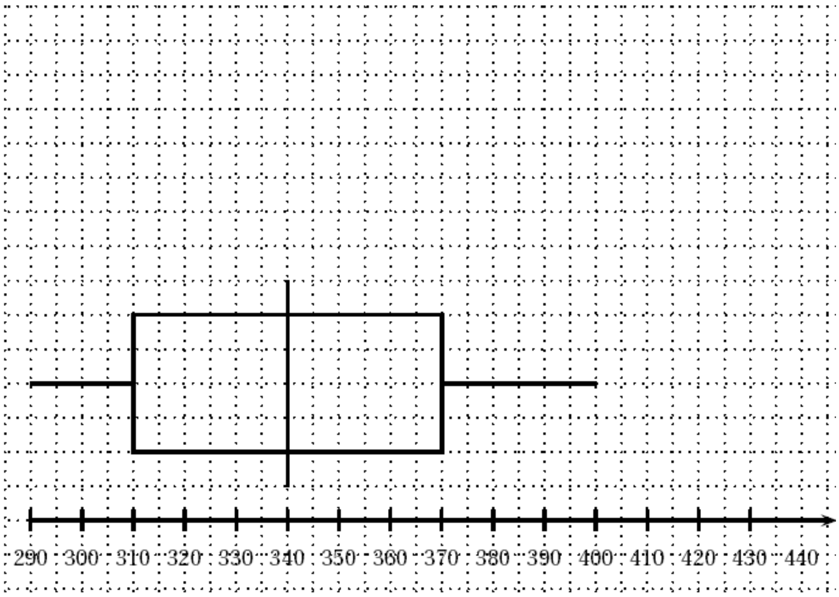
3. Le directeur de la gare peut-il déduire de cette enquête que 34% environ des billets vendus dans sa gare durant la première semaine du mois de juillet 2006 sont des billets de première classe ? Justifier.

$\frac{441}{2450} \times 100 = 18$ **Non, il n'y a eu au total que 18% de billets de première classe vendus.**

Partie 2

1. En 2005, la gare a réalisé un chiffre d'affaires annuel en milliers d'euros (K€), arrondi à l'unité de 4 108 K€. La série statistique des chiffres d'affaires mensuels réalisés cette année là est représentée par un diagramme en boîte donné ci-dessous.

Diagramme en boîte de la série des chiffres d'affaires annuels réalisés par la gare en 2005.



Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

Affirmation 1 : 50 % au moins des chiffres d'affaires mensuels de la gare en 2005 sont inférieurs ou égaux à 340 K€.

Vrai car la médiane de cette série est égale à 340.

Affirmation 2 : sur les douze mois de l'année 2005, deux seulement ont généré pour la gare un chiffre d'affaires mensuel inférieur ou égal à 310 K€.

Faux car Q1 = 310, donc au moins un quart de l'année, soit 3 mois ont généré pour la gare un chiffre d'affaires mensuel inférieur ou égal à 310 K€.

2. Les chiffres d'affaires mensuels et le chiffre annuel de la gare en 2006, en milliers d'euros (K€) et arrondis à l'unité, sont donnés ci-dessous :

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Chiffre d'affaires (K€)	330	342	360	372	375	385

Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre	Année 2006
415	410	424	430	391	350	**4 584**

a. Déterminer le minimum, le maximum, la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de la série statistique des chiffres d'affaires mensuels de la gare en 2006.

Pour déterminer tous ces éléments, il faut classer les données de la série par ordre croissant :

Chiffre d'affaires (K€)	330	342	350	360	372	375	385	391	410	415	424	430

Le chiffre d'affaires minimum est 330 K€ et le chiffre d'affaires maximum est 430 K€.

Médiane : l'effectif total est pair : N = 12

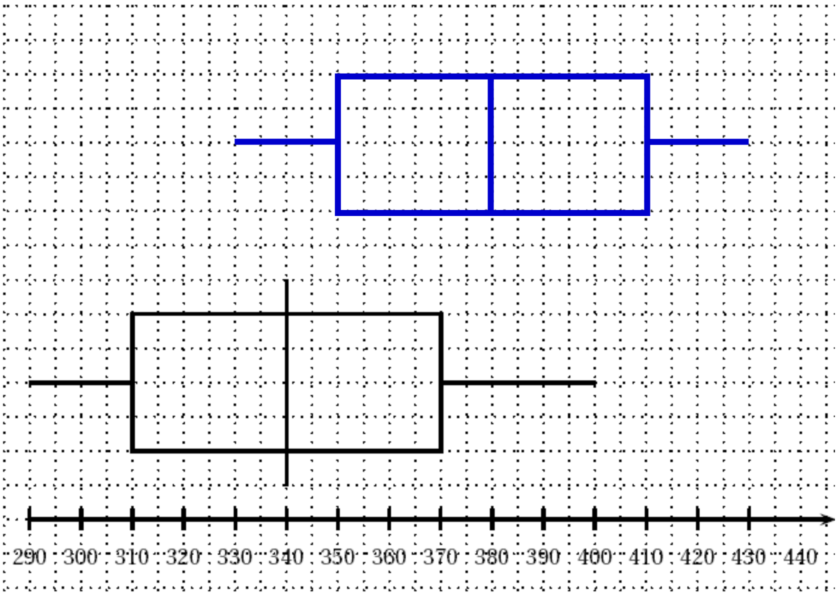
$\frac{N}{2} = 6$ donc la médiane est la moyenne des 6ème et 7ème termes de la série rangée dans l'ordre croissant :

$$\mathbf{Me} = \frac{375 + 385}{2} = \mathbf{380.}$$

Premier quartile : $\frac{N}{4} = 3$ donc Q_1 est la 3ème valeur de cette série **Q_1 = 350**

Troisième quartile : $\frac{3N}{4} = 9$ donc Q_3 est la 9ème valeur de cette série **Q_3 = 410**

b. Construire, sur le graphique donné ci-dessus, le diagramme en boîte de la série statistique des chiffres d'affaires mensuels de la gare en 2006.



c. Quelles conclusions le directeur de la gare peut-il tirer de la comparaison des deux diagrammes en boîte représentés ?
On peut remarquer que tous les indicateurs de l'année 2006 sont supérieurs à ceux de l'année 2005, le directeur de la gare peut donc en conclure que l'année 2006 a été bien meilleure que 2005.

EXERCICE 3 (9,5 points) **SECOND DEGRE**

Résoudre dans ℝ les équations et inéquations suivantes :

1. $-x^2 + 8x - 16 = 0$

$a = -1$ $b = 8$ $c = -16$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-1) \times (-16) = 64 - 64 = \mathbf{0}$ **$\Delta = 0$** donc il y a une seule racine.

$\mathbf{x_0} = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \times (-1)} = \frac{-8}{-2} = \mathbf{4}$ **S = {4}**

2. $2x^2 - 3x + 9 \geq 0$

$a = 2$ $b = -3$ $c = 9$

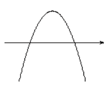
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 9 = 9 - 72 = \mathbf{-63}$ **$\Delta < 0$** donc il y n'y a pas de racine.

De plus $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, donc  Le polynôme $2x^2 - 3x + 9$ est strictement positif sur ℝ, donc **S = ℝ**

3. $-x^2 + 4x - 3 < 0$

$a = -1$ $b = 4$ $c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = \mathbf{4}$

$\mathbf{x_1} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2}{2 \times (-1)} = \frac{-6}{-2} = \mathbf{3}$ $a < 0$ et $\Delta > 0$ d'où 

$\mathbf{x_2} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+2}{2 \times (-1)} = \frac{-2}{-2} = \mathbf{1}$

S =]–∞ ; 1 [∪] 3 ; + ∞ [

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de $-x^2 + 4x - 3$		–	0	+	0	–	

EXERCICE 4 (9,5 points) **SECOND DEGRE**

Une entreprise produit au maximum 870 objets par jour.

Le coût total de production journalier de q objets, exprimé en euros, est donné par : $C(q) = 0,1\,q^2 + 10\,q + 1500$.

1. Déterminer par le calcul la quantité produite lorsque le coût de production est égal à 1610 €.

$C(q) = 1610 \quad \Leftrightarrow \quad 0,1\,q^2 + 10\,q + 1500 = 1610 \quad \Leftrightarrow \quad 0,1\,q^2 + 10\,q - 110 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 0,1 \times (-110) = 144$

$\Delta > 0$ donc le polynôme $0,1\,q^2 + 10\,q - 110$ admet 2 racines réelles :

$q_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10-\sqrt{144}}{2 \times 0,1} = -110$ et $q_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10+\sqrt{144}}{2 \times 0,1} = 10$

Comme $q_1 < 0$, **la quantité produite lorsque le coût de production est égal à 1610 € est 10 objets**.

2. L'entreprise vend chaque objet 93 €.

Déterminer l'expression de la recette $R(q)$, exprimée en Euros, en fonction de q.

Recette = prix unitaire × quantité

$\mathbf{R(q) = 93 \times q}$

3. Le bénéfice réalisé est donné par la relation : bénéfice = recette – coût.

a) Montrer que le bénéfice correspondant à la fabrication et à la vente de q objets est : $B(q) = -0,1\,q^2 + 83q - 1500$.

$$\begin{aligned} B(q) &= R(q) - C(q) \\ &= 93q - (0,1\,q^2 + 10\,q + 1500) \\ &= 93q - 0,1\,q^2 - 10\,q - 1500 \\ &= \mathbf{-0,1\,q^2 + 83q - 1500} \end{aligned}$$

b) Dans quel intervalle doit varier la quantité produite pour que le bénéfice soit strictement positif ?

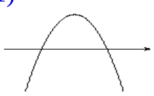
$B(q) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -0,1\,q^2 + 83q - 1500 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 83^2 - 4 \times (-0,1) \times (-1500) = 6289$

$\Delta > 0$ donc le polynôme $-0,1\,q^2 + 83q - 1500$ admet 2 racines réelles :

$q_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-83-\sqrt{6289}}{2 \times (-0,1)} = 415 + 5\sqrt{6289} \approx 811,52$

et $q_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-83-\sqrt{6289}}{2 \times (-0,1)} = 415 - 5\sqrt{6289} \approx 18,48$

$a = -0,1$, $a < 0$ et $\Delta > 0$ d'où 

q	0		q_2		q_1		870
Signe de $-0,1\,q^2 + 83\,q - 1500$		–	0	+	0	–	

$S =]q_2\,;\,q_1[$

Donc l'entreprise doit produire et vendre entre 19 et 811 objets pour que le bénéfice soit strictement positif.

c) Montrer que $B(q) = -0,1\,(q - 415)^2 + 15\,722,5$

$$\begin{aligned} -0,1\,(q-415)^2 + 15\,722,5 &= -0,1\,(q^2 - 830q + 172\,225) + 15\,722,5 \\ &= -0,1\,q^2 + 83q - 17\,222,5 + 15\,722,5 \\ &= -0,1\,q^2 + 83q - 1500 \\ &= B(q) \end{aligned}$$

d) En déduire le bénéfice maximal ainsi que la quantité produite pour laquelle il est atteint. Justifier.

Comme $a = -0,1$, $a < 0$, la fonction B est strictement croissante sur $[0\,;\,415]$ puis strictement décroissante sur $[415\,;\,870]$.
Le bénéfice maximal est donc atteint pour 415 objets et vaut 15 722,5€.