Exercice du livre page 124 n°57

f $(x) = x^3 + 2\,x^2 – 20\,x + 24$ sur IR

a) **Déterminer f´(x) et étudier le sens de variation de f**

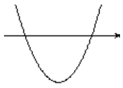
calculer f´(x)
trouver le signe de f´(x)
en déduire les variations de f

$$\mathbf{f´(x) = 3x^2 + 4\,x – 20}$$

On étudie le signe de $3x^2 + 4x - 20$: $\Delta = (4)^2 - 4(3)(-20) = 256$

$\Delta > 0$, donc il y a 2 racines : $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{256}}{2\times 3} = \dfrac{-4-16}{2\times 3} = -\dfrac{20}{6} = -\dfrac{10}{3}$

Et $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{256}}{2\times 3} = \dfrac{-4+16}{2\times 3} = 2$

et a > 0, donc 

x	$-\infty$		$-\dfrac{10}{3}$		2		$+\infty$
Signe de f ' (x)		+	0	−	0	+	
Variations de f		↗	f $(-\dfrac{10}{3})$	↘	0	↗	

f $(-\dfrac{10}{3}) \approx 76$ **f (2) = 0**

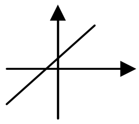
b) **Déterminer la convexité de f et préciser les éventuels points d'inflexion**

> **calculer f´´(x)**
>
> **trouver le signe de f´´(x)**
>
> **en déduire les variations de f´**
>
> **puis la convexité de f**

$\mathbf{f'(x) = 3x^2 + 4x - 20}$

$\mathbf{f''(x) = 6x + 4}$

On étudie le signe de $6x + 4$ qui est de la forme $mx + p$

$6x + 4 = \mathbf{0}$	$\mathbf{m = 6}$
$6x = -4$	$m > 0$
$x = -\dfrac{4}{6}$	
$x = -\dfrac{2}{3}$	

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
Signe de f´´(x)	$-$	0	$+$
Variation de f´	↘		↗
Convexité de f	f est concave		f est convexe

Conclusion :

f est concave sur $\mathbf{]-\infty\,;\,-\frac{2}{3}]}$

f est convexe sur $\mathbf{[-\frac{2}{3}\,;\,+\infty[}$

Cf admet un point d'inflexion qui a pour abscisse $\mathbf{-\frac{2}{3}}$

c) **Déterminer les équations des tangentes T_{-4} et T_3 à la courbe Cf aux points d'abscisses – 4 et 3**

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

a = – 4 **La tangente T_{-4} a pour équation** : $y = f'(-4)(x - (-4)) + f(-4)$

$y = f'(-4)(x + 4) + f(-4)$

Or $f(x) = x^3 + 2x^2 - 20x + 24$ donc $f(-4) = (-4)^3 + 2 \times (-4)^2 - 20 \times (-4) + 24 = 72$

$\mathbf{f'(x) = 3x^2 + 4x - 20}$ **donc** $f'(-4) = 3 \times (-4)^2 + 4 \times (-4) - 20 = 12$

on a donc : $y = 12(x + 4) + 72$

$y = 12x + 48 + 72$

$\mathbf{y = 12x + 120}$

a = 3 **La tangente T_3 a pour équation** : $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$

Or $f(x) = x^3 + 2x^2 - 20x + 24$ donc $f(3) = 3^3 + 2 \times 3^2 - 20 \times 3 + 24 = 9$

$\mathbf{f'(x) = 3x^2 + 4x - 20}$ donc $f'(3) = 3 \times 3^2 + 4 \times 3 - 20 = 19$

on a donc : $y = 19(x - 3) + 9$

$y = 19x - 57 + 19$

$y = 19x - 48$

d) Déterminer la position relative de Cf et T_{-4} sur $]-\infty ; -\frac{2}{3}]$

e) Déterminer la position relative de Cf et T_3 sur $[-\frac{2}{3} ; +\infty[$

x	$-\infty$ $\qquad$ $-\frac{2}{3}$	$+\infty$
Convexité de f	f est concave	f est convexe

d) f est concave sur $]-\infty ; -\frac{2}{3}]$

donc **Cf est en dessous de chacune de ses tangentes** sur cet intervalle.

Or $-4 \in]-\infty ; -\frac{2}{3}]$

donc en particulier Cf en dessous de T_{-4}

e) f est convexe sur $[-\frac{2}{3} ; +\infty[$

donc **Cf est au dessus de chacune de ses tangentes sur cet intervalle.**

Or $3 \in [-\frac{2}{3} ; +\infty[$

donc en particulier Cf est au dessus de T_3

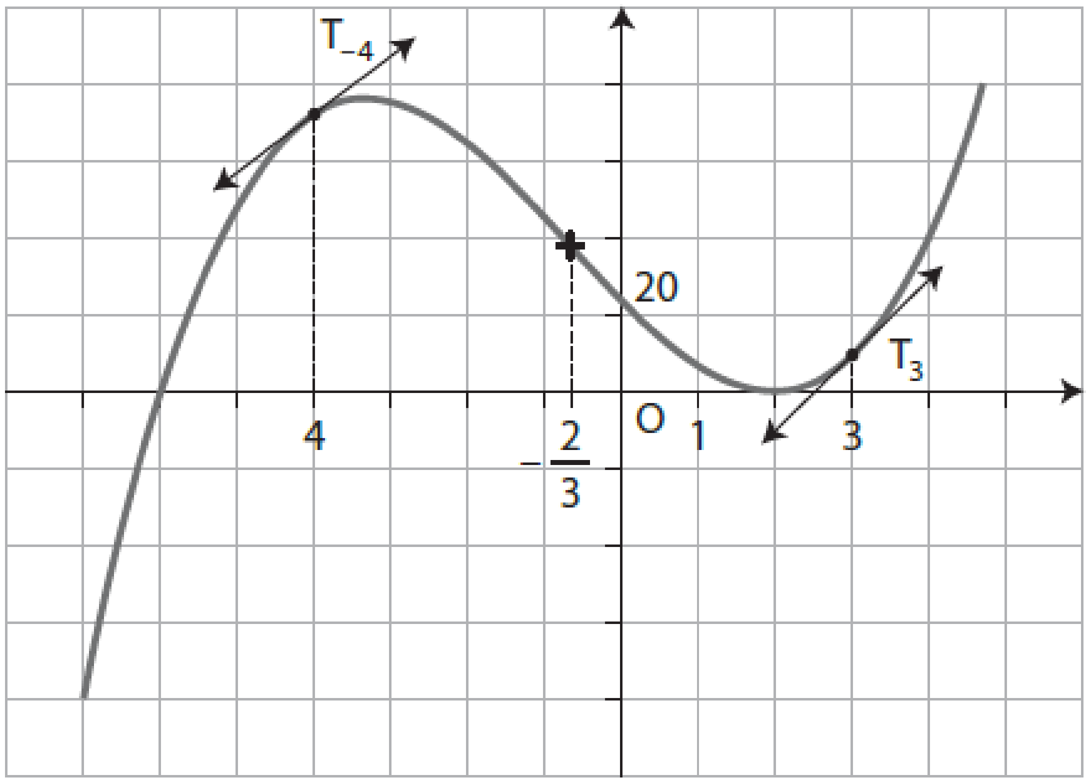
x	$-\infty$		$-\frac{10}{3}$		2		$+\infty$
Signe de f ' (x)		+	0	−	0	+	
Variations de f		↗	$f(-\frac{10}{3})$	↘	$f(2)$	↗	

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
Convexité de f		f est concave		f est convexe	

$f(-\frac{10}{3}) \approx 76$ $\quad f(2) = 0 \quad$ $f(-\frac{2}{3}) \approx 38$

La tangente T_{-4} a pour équation : $y = 12x + 120$

La tangente T_3 a pour équation : $y = 19x - 48$



Exercice 2

Etudier la convexité de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 2)\, e^x$

calculer $f''(x)$
trouver le signe de $f''(x)$
en déduire les variations de f'
puis la convexité de f

$f(x) = (x^2 - 2)\, e^x$

$f = uv$ $\quad u(x) = x^2 - 2 \quad u'(x) = 2x$

$f' = u'v + v'u$ $\quad v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x$

$$f'(x) = 2x\, e^x + (x^2 - 2)e^x = (x^2 + 2x - 2)e^x$$

$f' = uv$ $\quad u(x) = x^2 + 2x - 2 \quad u'(x) = 2x + 2$

$f'' = u'v + v'u$ $\quad v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x$

$$f''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x - 2)e^x$$

$$f''(x) = (2x + 2 + x^2 + 2x - 2)e^x$$

$$f''(x) = (x^2 + 4x)e^x$$

$$f''(x) = x(x + 4)e^x$$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(x + 4)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de e^x		$+$		$+$		$+$	
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f'		↗		↘		↗	
Convexité de f		**f est convexe sur $]-\infty ; -4]$**		**f est concave sur $[-4 ; 0]$**		**f est convexe sur $[0 ; +\infty[$**	