| | |
|---|---|
| **TS : ARPE soutien** | **Nombres complexes (2)** |

*Objectifs visés ce jour : utiliser la résolution d'équations du second degré*
*utiliser la forme algébrique des complexes dans diverses situations*

## Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   a) $z^2 + 9 = 0$
   b) $z^2 - 8\sqrt{3}\, z + 64 = 0$
   c) $\dfrac{z-2}{z-1} = z$
2. On considère l'équation : $z^3 - 5z^2 + 11z - 15 = 0$
   a) Montrer qu'il existe trois réels a,b et c tels que, pour tout nombre complexe z,
   $z^3 - 5z^2 + 11z - 15 = (z-3)(az^2 + bz + c)$
   b) En déduire les solutions de l'équation $z^3 - 5z^2 + 11z - 15 = 0$

3. (* * *) Soit $P(z) = z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1$
   Vérifier que pour tout z, différent de zéro, $\dfrac{P(z)}{z^2} = \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 - (1+\sqrt{2})\left(z + \dfrac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$ .
   Résoudre alors l'équation $P(z) = 0$

## Exercice 2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.
On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe $z = x+iy$ ( x et y réels) associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = z^2 - 4z$.

1. a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y
   b) En déduire l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel
2. Soient A et B les points d'affixes respectives : $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - i\sqrt{3}$
   a) Calculer les affixes des points A' et B', images par f des points A et B. Placer ces points sur la figure.
   b) Soit G le point d'affixe 2, et $M_1$ et $M_2$ les points d'affixes $z_1$ et $z_2$.
   Montrer que si G est le milieu de $[M_1M_2]$ alors $z_2 = 4 - z_1$ et $f(M_2) = f(M_1)$
   c) Expliquer alors le résultat de la question 2a)
3. Soit le point I d'affixe $-3$
   a) Montrer que OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$
   b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ cette équation.

## Exercice 3 :

Dans le plan complexe, on note A et M les points d'affixes respectives 2 et x + iy.

Pour tout $z \neq 2$ , on considère $z' = \dfrac{z}{z-2}$ .

a) On pose $z = x + iy$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
b) Déterminer alors l'ensemble des points M tels que z' soit réel.
c) Déterminer alors l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur.