L'une des parties les plus compliquées du programme de physique car il y a un peu de tout : de la géométrie et des équations différentielles. Fort heureusement – si l'on peut dire - c'est tellement compliqué qu'on ne peut rien demandé de plus que ce qui est écrit ci-dessous. Voyons donc les compétences et savoir-faire exigibles sur le mouvement des planètes.

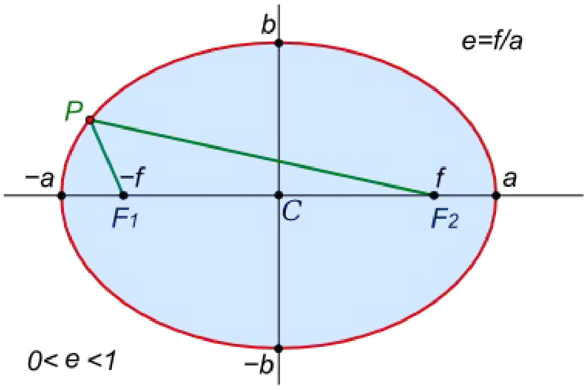
Remarque : Dans cet article, les vecteurs sont représenté en gras : ***g*** *est le vecteur gravitation tandis que g est la valeur de la gravitation. On peut écrire : g=9,8 N/kg mais on écrira* ***g****=-g.****k***

- **Énoncer les lois de Kepler et les appliquer à une trajectoire circulaire ou elliptique.**

Les lois de Képler (d'après Johannes Képler, 1571 – 1630) s'énoncent comme suit :

1. Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.

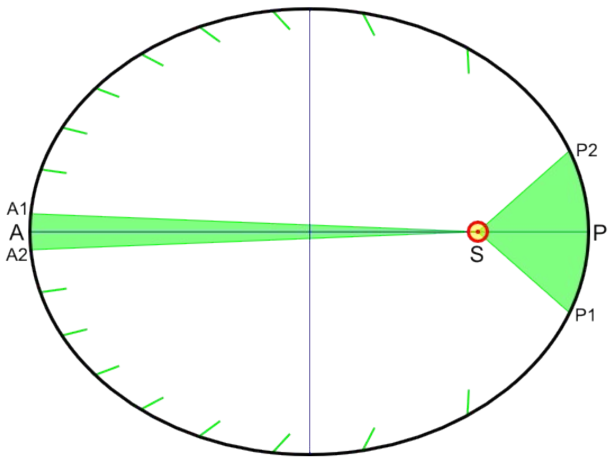
Rappelons qu'une ellipse est caractérisée par ces foyers S et S' tels que SP+S'P=2a où a est le demi grand axe :



Le rapport entre le demi-grand axe a et f, la distance entre le foyer et le centre de symétrie de l'ellipse est l'excentricité e=f/a. Si e=0 alors l'ellipse est un cercle. Dans le système solaire, les planètes décrivent des ellipses très proches du cercle. Pour la terre, par exemple, e=0,017.

2. Le segment Soleil-Planète balaie des aires égales au cours de durées égales.

Ceci implique que les planètes et les comètes accélèrent lorsqu'elles se rapprochent du soleil :



En effet, afin d'assurer l'égalité des aires A_1SA_2 et P_1SP_2 balayées par la planète pendant une même durée, il est nécessaire que la planète parcourt P_1P_2 plus rapidement que A_1A_2.

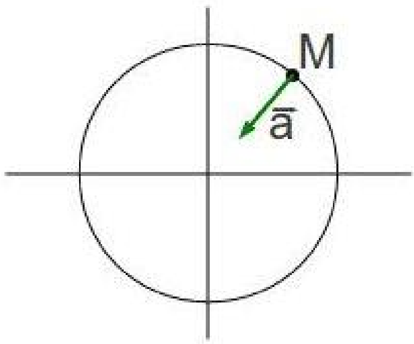
3. Le rapport T^2/a^3 a la même valeur pour toutes les planètes, cette valeur ne dépendant que de l'astre attracteur. T est la période de révolution et a, le demi-grand axe de la trajectoire balayée par la planète.

Nous verrons en utilisant les lois de Newton que cette valeur constante est égale à $4\pi^2/GM_S$. Ainsi, l'observation du mouvement des planètes du système solaire permet de déterminer la masse du soleil.

Bien que Képler les ait déterminées à partir du mouvement des planètes du système solaire, ces lois sont valables pour tout système centré comme une planète et ses satellites ou n'importe quel autre système planétaire.

- **Définir un mouvement circulaire uniforme et donner les caractéristiques de son vecteur accélération.**

Un objet décrit un mouvement circulaire uniforme lorsque son centre d'inertie décrit un cercle à vitesse constante. On peut dans ce cas-là définir la vitesse angulaire de rotation ω qui s'exprime en radian par seconde. La vitesse exprimée en $m.s^{-1}$ est alors égale à R.ω.
Le vecteur accélération dans un tel mouvement est constant, centré vers le centre de la trajectoire et est égal à la v^2/R :



- **Connaître les conditions nécessaires pour observer un mouvement circulaire uniforme : vitesse initiale non nulle et force radiale.**

Puisque dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est dirigée vers le centre du mouvement, le système est nécessairement soumis à une force constamment dirigée vers le centre de la trajectoire, en vertu de la seconde loi de Newton, $\Sigma \mathbf{f}_{ext}=m.\mathbf{a}$. Une telle force, est dite radiale.
Un objet soumis à une force radiale sans vitesse initiale, aurait une trajectoire rectiligne accélérée dans le sens de la force.
Pour obtenir un mouvement circulaire, il faut que la vitesse initiale soit non nulle.

- **Énoncer la loi de gravitation universelle sous sa forme vectorielle pour des corps dont la répartition des masses est à symétrie sphérique et la distance grande devant leur taille.**

Pour deux corps A et B, présentant les conditions ci-dessous, à savoir une symétrie sphérique et à une distance supérieure à leur taille, la loi de gravitation d'énonce :

$$\mathbf{F}_{A/B}= - G.M_A.M_B/d_{AB}^2.\mathbf{u}_{AB}$$

où $\mathbf{u}_{AB}$ est le vecteur unitaire porté par AB, allant de A vers B.

Avant d'attaque la suite qui est particulièrement ardue, je propose une petite pause parfaitement à propos :

> *Un milliardaire voudrait offrir des millions à celui qui répondra à cette question : « Comment prédire les chevaux qui ont le meilleur potentiel pour la course ? ».*
>
> *Un généticien, un physiologiste et un physicien sont convoqués et reviennent au bout d'un mois.*
>
> - *Le généticien affirme qu'il a fait le tour de toutes les publications, vérifié l'ADN des lignées de chevaux sur des décennies mais le problème est hélas trop complexe pour prédire un gagnant.*
> - *Le physiologiste s'y colle et regarde la densité musculaire et osseuse et autres facteurs et conclut que le problème contient trop de facteurs pour réaliser une prédiction fiable.*
> - *Le physicien s'y attèle à son tour et revient avec le sourire en disant : « Voilà : cette équation résout votre problème ».*
>
> *Le millionnaire est heureux et s'apprête à saisir son chéquier quand le physicien rajoute : « Une chose à savoir : mon équation s'applique à un cheval à symétrie sphérique qui se déplace dans le vide. ».*

Ce qui est exactement le cas de ce qui va suivre...

- **Appliquer la deuxième loi de Newton à un satellite ou à une planète.**

Prenons un satellite ou une planète P au voisinage, respectivement d'une planète ou d'un astre S.

P n'est soumis(e) qu'à l'attraction gravitationnelle exercée par S. Ainsi, la seconde loi de Newton s'écrit dans le référentiel centré sur S, considéré comme galiléen :

$$\Sigma \mathbf{f}_{ext}=m.\mathbf{a} \leftrightarrow - G.M_S.M_P/d_{SP}^2.\mathbf{u}_{SP} = M_P.\mathbf{a}_P \leftrightarrow - G.M_S/d_{SP}^2.\mathbf{u}_{SP} = \mathbf{a}_P$$

Rq : on peut réécrire $\mathbf{a}_P = d^2 \mathbf{SP} / dt^2$ ainsi, cette dernière équation est en fait une équation différentielle puisqu'elle relie $\mathbf{SP} = d_{SP}.\mathbf{u}_{SP}$ à sa dérivée seconde. Bon, c'est pas facile à voir, mais c'est pas grave puisqu'il ne faut savoir la résoudre que dans un seul cas. Celui qui est énoncé ci-dessous.
Si vous voulez vous amuser à voir les solutions obtenues en fonction des conditions initiales, essayez la simulation proposée par l'université du colorado.

- **Démontrer que le mouvement circulaire et uniforme est une solution des équations obtenues en appliquant la deuxième loi de Newton aux satellites ou aux planètes.**

Dans l'expression de l'accélération obtenue précédemment, $\mathbf{a}_P = - G.M_S/d_{SP}^2.\mathbf{u}_{SP}$ (E1) l'accélération est centrée sur le point S comme dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme. Cela implique qu'avec les bonnes conditions initiales, le mouvement circulaire uniforme est solution des équations du mouvement.
Dans ce cas, nous avons vu que l'accélération était dirigée vers le centre du cercle et égale à v^2/R. C'est à dire, qu'ici, elle s'exprime $\mathbf{a}_P = - v^2/d_{SP}.\mathbf{u}_{SP}$ (E2).
En égalisant (E1) et (E2), on obtient l'expression de la vitesse nécessaire pour obtenir le mouvement circulaire uniforme : $v^2/d_{SP}.\mathbf{u}_{SP} = G.M_S/d_{SP}^2.\mathbf{u}_{SP}$. Deux vecteurs sont égaux si leur norme est égale, on déduit donc : $v^2/d_{SP} = G.M_S/d_{SP}^2$ soit $v=\sqrt{(G.M_S/d_{SP})}$ - se lit racine de $G.M_S$ sur d_{SP}
Résumons-nous. Si l'on place un objet à une distance d_{SP} d'un astre ou d'une planète et qu'on le lance avec une vitesse $v=\sqrt{(G.M_S/ d_{SP})}$ perpendiculaire à l'axe SP, alors il aura un mouvement circulaire uniforme.

- **Définir la période de révolution et la distinguer de la période de rotation propre.**

Ouf, après tous ces calculs, on nous demande enfin quelque chose qu'un enfant de 10 ans peut retenir !
La période de révolution d'une planète est la durée nécessaire pour que la planète fasse un tour complet autour de l'astre tandis que la période de rotation propre est la durée pour qu'elle fasse un tour sur elle-même. Attention, il ne faut pas confondre, ça n'est pas du tout la même chose : pour la terre, la période de révolution autour du soleil est environ de 365 jours alors que la période de rotation propre est de 24 h – cela veut dire que la terre fait 365 tours sur elle-même lorsqu'elle n'a fait qu'un tour autour du soleil.

- **Exploiter les relations liant la vitesse, la période de révolution et le rayon de la trajectoire.**

Ceci est la suite de la démonstration que le mouvement circulaire uniforme est possible pour une planète ou un satellite autour de son astre ou sa planète. En une période de révolution, l'objet (satellite ou planète) a fait un tour autour de son centre de rotation. Ainsi, il a parcouru $2\pi d_{SP}$ en un temps T.
Sa vitesse est donc $v=2\pi d_{SP}/T$. Voici donc la relation liant la vitesse v, la période de révolution T et le rayon de la trajectoire d_{SP}.
Voyons l'exploitation de cette relation :
on a vu que pour le mouvement circulaire uniforme, $v=\sqrt{(G.M_S/ d_{SP})}$ ainsi, si l'on identifie les deux expressions, on obtient :

$$2\pi d_{SP}/T = \sqrt{(G.M_S/ d_{SP})}$$

$$\text{soit } T = 2\pi \sqrt{(d^3_{SP} / GM_S)}$$

oui oui, il faut bidouiller un peu pour arriver à cela.

Ouf ! Nous y sommes arrivé : nous avons pu obtenir la période de révolution d'un objet en fonction de sa distance à son astre attracteur.
Pour une planète, l'exploitation de cette relation nous donne quelque chose comme 365 jours pour une masse égale à celle du soleil et une distance égale à celle de la terre. Normal.
Cette expression est intéressante à exploiter dans le cas des satellites. Ainsi, en prenant pour M_s, les $5{,}98.10^{24}$ kg de masse de la terre et d_{SP} l'orbite moyenne de la navette ou de la station spatial internationale, c'est à dire 400 km, on obtient T=5600 s soit environ 1 h30. Et oui, en orbite à 400

km, on fait un tour de terre en 1h 30 !

- **Connaître et justifier les caractéristiques imposées au mouvement d'un satellite pour qu'il soit géostationnaire.**

La relation $T = 2\pi \sqrt{(d^3_{SP} / GM_S)}$ exprime que plus un satellite est éloigné de la terre, plus sa période de révolution autour de la terre est grande. Ainsi, il existe une orbite telle que T soit égal à 24h, soit 86 400 s. Pour trouver cette distance, il faut exprimer d_{SP} en fonction de T. Après un peu de bidouille, on arrive à :

$$d_{SP} = \sqrt[3]{(GM_S (T/2\pi)^2)}$$

L'application numérique donne 42 250 km

En orbite à 42 250 km, on tourne autour de la terre en 24 h. Mais pour qu'un satellite semble immobile au-dessus du sol, encore faut-il qu'il tourne dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation de la terre, c'est à dire qu'il soit dans le plan de l'équateur. Ainsi, les conditions pour qu'un satellite soit géostationnaire sont :

Etre mis dans une orbite circulaire à 42 250 km, dans le plan de l'équateur.

Remarque : ceci explique pourquoi les paraboles sont dirigées vers le sud dans l'hémisphère nord. Elles pointent vers les satellites géostationnaires qui sont au niveau de l'équateur.

- **Retrouver la troisième loi de Kepler pour un satellite ou une planète en mouvement circulaire uniforme.**

Pour le mouvement circulaire uniforme, on a démontré que $2\pi d_{SP}/T = \sqrt{(G.M_S/ d_{SP})}$ en mettant le tout au carré, on obtient

$$4\pi^2 d^2_{SP}/T^2 = G.M_S/ d_{SP} \text{ soit,}$$

$$4\pi^2 d^3_{SP} = G.M_S.T^2 \rightarrow T^2 / d^3_{SP} = 4\pi^2 / G.M_S$$

On retrouve la troisième loi de Kepler et en prime, on calcule la valeur de la constante.
Remarque : c'est de cette façon qu'on détermine la masse des planètes ou du soleil.

- **Exploiter des informations concernant le mouvement de satellites ou de planètes.**

A partir des données orbitales et toutes les formules démontrées ci-dessus, on peut déterminer des grandeurs. Par exemple, la lune est située à 380 000 km et sa période de révolution est de 27,3 jours. Sachant que $T^2 / d^3_{SP} = 4\pi^2 / G.M_S$ on en déduit que $M_S= (4\pi^2 / G).(d^3_{SP} /T^2)$ soit $6{,}0 \times 10^{24}$ kg.

Et bien si vous êtes arrivé jusque là, c'est qu'on n'est plus très loin du bac et que vous êtes motivé pour l'avoir. C'est bien, vous avez déjà fait 80 % du boulot !
Maintenant, vous avez le droit de regarder la vidéo.

Mais j'imagine que vous l'aviez regardée avant, non ?