Un exemple d'exercice liant satellites et relativité

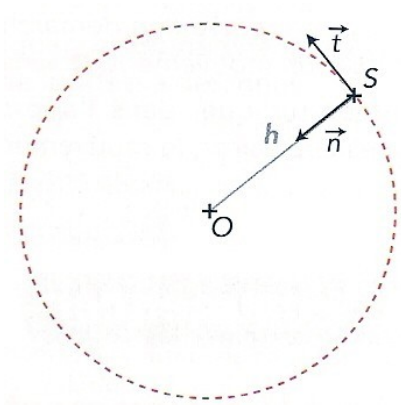
proposé par Cédric Lémery – lewebpedagogique.com/physique – facebook : laphysiqueaubacs

Les satellites GPS

Le GPS comprend au moins 24 satellites tournant à 20 200 km d'altitude. Ces satellites émettent en permanence […] un message, transmis à 50 bit/s, qui inclut en particulier les éphémérides permettant le calcul de la position des satellites, ainsi que des informations sur leur horloge interne.

Ainsi, un récepteur GPS qui capte les signaux d'au moins quatre satellites équipés de plusieurs horloges atomiques peut, en calculant les temps de propagation de ces signaux entre les satellites et lui, connaître sa distance par rapport à ceux-ci et, par trilatération, situer précisément en trois dimensions n'importe quel point placé en visibilité des satellites, avec une précision de 15 à 100 mètres pour le système standard. Le GPS est ainsi utilisé pour localiser des véhicules roulants, des navires, des avions, des missiles et même des satellites évoluant en orbite basse.

[…] Ces satellites évoluent sur 6 plans orbitaux ayant une inclinaison d'environ 55° sur l'équateur. Ils suivent une orbite quasi-circulaire à une altitude de 20 000 à 20 500 km qu'ils parcourent en 11 h 58 min 2 s, soit un demi-jour sidéral. Ainsi, les satellites, vus du sol, reprennent la même position dans le ciel au bout d'un jour sidéral. *Extrait de Wikipedia*



A. La trajectoire des satellites

On envisage l'étude d'un satellite GPS situé à l'altitude h = 20 200 km, considéré comme ponctuel. La Terre de rayon $R_T = 6{,}38 \times 10^3\ km$ est à répartition sphérique de masse, et sa masse est $M_T = 5{,}97.10^{24}$ kg, la constante de gravitation : $G=6{,}67.10^{-11}$ S.I.

1) Représenter sur la figure ci-contre, par un vecteur sans échelle, la force de gravitation exercée par la Terre sur le satellite GPS $\vec{F}_{T/GPS}$.

2) Donner l'expression vectorielle de la force de gravitation exercée par la Terre sur le satellite GPS $\vec{F}_{T/GPS}$.

3) Après avoir rappelé la 2nde loi de Newton, établir l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ du satellite GPS.

4) Montrer que le mouvement circulaire du satellite est uniforme dans le référentiel géocentrique.

5) Établir l'expression de la valeur v de la vitesse du satellite. Vérifier que $v= 3{,}88.10^3$ m.s^{-1}

6) Retrouver la valeur de la période T_{GPS} de révolution donnée dans le texte.

B. Effets relativistes

Dans les systèmes de positionnement par GPS, on mesure des durées τ de parcours de signaux électromagnétiques pour calculer des distances : d=c.τ

Rappel : selon la relativité d'Einstein, la relation entre durée propre Δt_p et durée mesurée Δt_m est $\Delta t_m = \gamma \times \Delta t_p$

où $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ est le coefficient de Lorentz. La vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3{,}0.10^8$ m.s^{-1}.

1) Définir la durée propre dans le cas de l'horloge embarquée du satellite GPS.

2) Montrer que l'écart de temps dû à la dilatation relativiste susceptible d'exister entre l'horloge embarquée du GPS au bout d'un jour mesuré sur terre est de 7,2 µs.

3) Calculer l'erreur de détermination de la distance par rapport au satellite si le récepteur ne prend pas en compte la correction relativiste. Cette erreur est-elle acceptable par les utilisateurs ?