FICHE – Formules trigonométriques

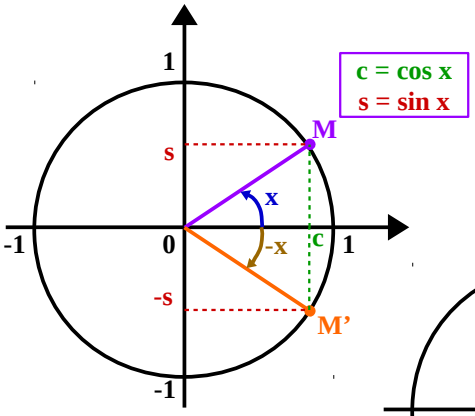
- On peut retrouver les relations ci-dessous pour des raisons de symétries dans le **cercle trigonométrique (un simple <u>croquis suffit</u> pour les retrouver)** :

  1) Repère sur les axes (abscisses pour le cosinus, ordonnées pour le sinus) la position d'un point M du cercle trigonométrique pour un angle x donné.

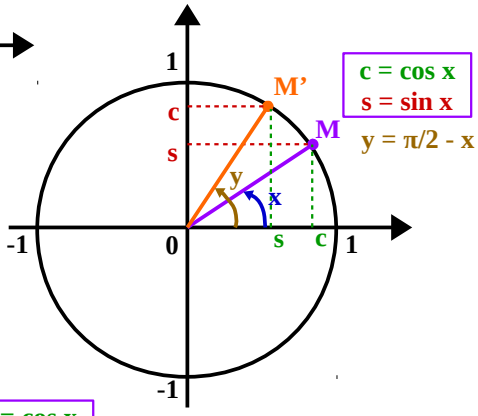
  2) Compare ensuite sa position si tu prends son angle opposé (-x), $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $(\pi + x)$ *, etc...*

  3) En comparant toujours à cos (x) et sin (x), tu peux obtenir des relations très pratiques (changement d'expression…) :

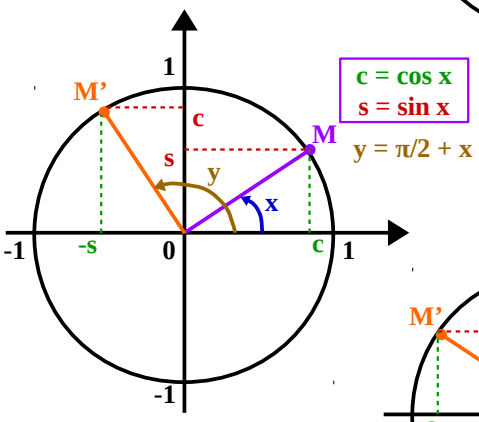
$$\begin{cases} \sin(-x) = -\sin(x) \\ \cos(-x) = \cos(x) \end{cases}$$



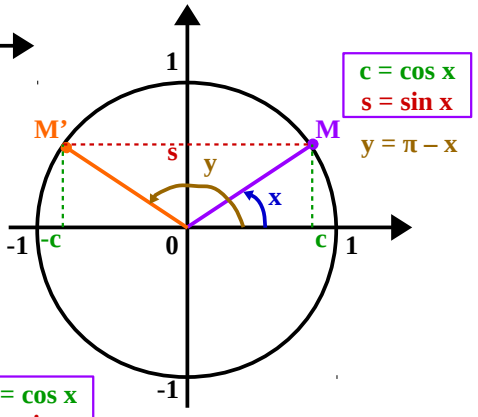
$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \end{cases}$$



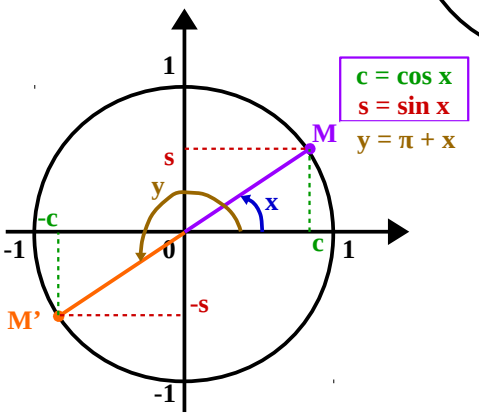
$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \cos(\pi - x) = -\cos(x) \end{cases}$$



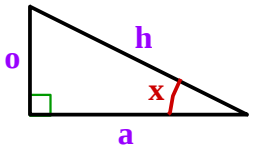
$$\begin{cases} \sin(\pi + x) = -\sin(x) \\ \cos(\pi + x) = -\cos(x) \end{cases}$$



- **RAPPELS** *(collège)* :

➢ **« Cah Soh Toa »** (« Casse-toi ! ») ← → $\cos = \frac{a}{h}$ $\sin = \frac{o}{h}$ $\tan = \frac{o}{a}$

« h » pour « hypoténuse » → côté le plus long (opposé à l'angle droit)
« a » pour « adjacent » → côté touchant l'angle x mais différent de l'hypoténuse
« o » pour « opposé » → côté ne touchant pas l'angle x



➢ Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$\boxed{-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1}$ *(voir le cercle trigonométrique)*
$\boxed{-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1}$ *(voir le cercle trigonométrique)*

$\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$ *(utiliser Pythagore dans le cercle trigonométrique)*

➢ Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[$:

$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$ *(il faut : $\cos x \neq 0$ donc $x \neq \frac{\pi}{2} \mod \pi$)*

➢ 5 angles particuliers (***les deux 1ères lignes permettent de déduire les deux autres***) :

Angle x *[rad]*	**0** *(= 0°)*	$\frac{\pi}{6}$ *(= 30°)*	$\frac{\pi}{4}$ *(= 45°)*	$\frac{\pi}{3}$ *(= 60°)*	$\frac{\pi}{2}$ *(= 90°)*
sin x	$\frac{\sqrt{0}}{2} \to 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} \to \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \to \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} \to 1$
cos x	$\frac{\sqrt{4}}{2} \to 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \to \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} \to \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} \to 0$
tan x	**0**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**1**	$\sqrt{3}$	*Division par zéro !*

- **Formules générales** :

$\boxed{\sin(a+b) = \sin a \,.\, \cos b + \cos a \,.\, \sin b}$

$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \sin a \,.\, \sin b}$

$\boxed{\sin(a-b) = \sin a \,.\, \cos b - \cos a \,.\, \sin b}$

$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b}$

ASTUCE *! Je peux retrouver les 2ndes formules à partir des 1ères en utilisant :*

$$\begin{cases} a - b = a + (-b) \\ \cos(-b) = \cos b \quad \textit{et} \quad \sin(-b) = -\sin b \end{cases}$$

(seul sin (-b) change les signes dans les 1ères formules)

- Ces quatre formules sont importantes car elles peuvent permettre de retrouver les formules précédentes !

Exemples :

✗ *Si a = b = x, alors :*

$$\cos x \,.\, \cos x + \sin x \,.\, \sin x = \cos (x - x)$$
$$\cos^2 x + \sin^2 x = \cos (0)$$
$$\boldsymbol{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

ou :

$$\cos (-x) = \cos (0 - x)$$
$$\cos (-x) = \cos 0 \,.\, \cos x - \sin 0 \,.\, \sin x$$
$$\cos (-x) = 1 \,.\, \cos x - 0 \,.\, \sin x$$
$$\boldsymbol{\cos (-x) = \cos x}$$

ou :

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin \frac{\pi}{2} \,.\, \cos x - \cos \frac{\pi}{2} \,.\, \sin x$$
$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \,.\, \cos x - 0 \,.\, \sin x$$
$$\boldsymbol{\sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x}$$

- D'autres formules peuvent être déduites si l'on prend **a = b = x** :

✗ $\sin (x + x) = \sin x \,.\, \cos x + \cos x \,.\, \sin x$

D'où :

$$\boxed{\boldsymbol{\sin (2x) = 2 \,.\, \sin x \,.\, \cos x}}$$

✗ De même :

$\cos (2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos (2x) = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2.\sin^2 x$

$\cos (2x) = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$

D'où :

$$\boxed{\boldsymbol{\cos (2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2.\sin^2 x = 2.\cos^2 x - 1}}$$

- **Dans ℂ *(nombres complexes)* :**

On sait que : $\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \,.\, \sin x \\ e^{-ix} = \cos (-x) + i \,.\, \sin (-x) = \cos x - i \,.\, \sin x \end{cases}$

d'où : $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$ et $e^{ix} - e^{-ix} = 2 i \,.\, \sin x$

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}} \\ \boldsymbol{\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}} \end{cases}}$$

➢ Je peux retrouver les formules précédentes :

✗ **sin a . cos b + cos a . sin b**

$$= \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \cdot \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} + \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \cdot \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}$$

$$= \frac{\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)\left(e^{ib} + e^{-ib}\right) + \left(e^{ia} + e^{-ia}\right)\left(e^{ib} - e^{-ib}\right)}{4i}$$

$$= \frac{e^{ia}e^{ib} + \cancel{e^{ia}e^{-ib}} - \cancel{e^{-ia}e^{ib}} - e^{-ia}e^{-ib} + e^{ia}e^{ib} - \cancel{e^{ia}e^{-ib}} + \cancel{e^{-ia}e^{ib}} - e^{-ia}e^{-ib}}{4i}$$

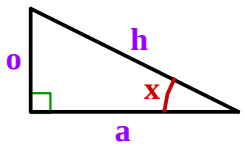
$$= \frac{2.e^{ia}e^{ib} - 2.e^{-ia}e^{-ib}}{4i}$$

$$= \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{2i}$$

$$= \sin(a+b)$$

✗ De même, on retrouve ainsi : **cos a . cos b – sin a . sin b = cos (a + b)**

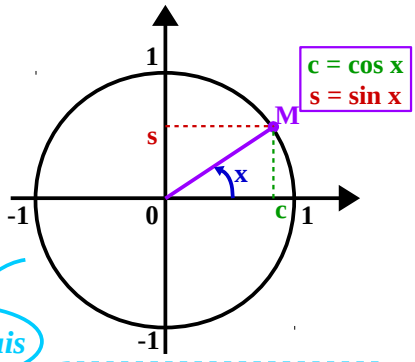
L'ESSENTIEL A RETENIR !



$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

« Cah Soh Toa »

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$



J'en déduis

$$\begin{cases} \sin(-x) = -\sin(x) \\ \cos(-x) = \cos(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \cos(\pi - x) = -\cos(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi + x) = -\sin(x) \\ \cos(\pi + x) = -\cos(x) \end{cases}$$

$$\sin(a+b) = \sin a . \cos b + \cos a . \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a . \cos b - \cos a . \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a . \cos b - \sin a . \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b$$

$$\begin{cases} \sin(2x) = 2 . \sin x . \cos x \\ \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \end{cases}$$

$$= 1 - 2.\sin^2 x$$
$$= 2.\cos^2 x - 1$$

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

Angle x *[rad]*	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	$\frac{\sqrt{0}}{2} \rightarrow \mathbf{0}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} \rightarrow \mathbf{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} \rightarrow \mathbf{1}$