SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

SUITES ARITHMÉTIQUES	*SUITES GÉOMÉTRIQUES*
Définition par récurrence : $\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = U_n + r \end{cases}$ r = constante réelle r = « raison »	Définition par récurrence : $\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = U_n \times q \end{cases}$ q = constante réelle q = « raison »
Définition fonctionnelle : $U_n = U_0 + r \times n$	Définition fonctionnelle : $U_n = U_0 \times q^n$
Exemple : $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = U_n - 5 \end{cases}$ *est équivalent à :* $U_n = -2 - 5n$	*Exemple :* $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{3} \end{cases}$ *est équivalent à :* $U_n = -2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
Série : Somme de termes consécutifs $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ $S_n = (n + 1) \times \dfrac{(U_0 + U_n)}{2}$	Série : Somme de termes consécutifs $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ $S_n = U_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
Généralisation : $U_n = U_p + r \times (n - p)$ *Exemple :* $U_n = U_7 + r \times (n - 7)$	Généralisation : $U_n = U_p \times q^{n-p}$ *Exemple :* $U_n = U_5 \times q^{n-5}$
Généralisation : $S_n = (n + 1 - p) \times \dfrac{(U_p + U_n)}{2}$ *Exemple :* $S_n = (n - 3) \times \dfrac{(U_4 + U_n)}{2}$	Généralisation : $S_n = U_p \times \dfrac{1 - q^{n+1-p}}{1 - q}$ *Exemple :* $S_n = U_{10} \times \dfrac{1 - q^{n-9}}{1 - q}$

LES SUITES : MÉTHODES

<u>DÉFINITIONS</u> : (pas exactes : « intuitives », le cours reste votre meilleur source de savoir)

- **Définition de (U_n) par récurrence :**

  Définition de la suite (U_n) par la valeur du terme de premier rang **p**, et par le calcul de $\mathbf{U_{n+1}}$ à partir de $\mathbf{U_n}$ (calcul de n'importe quel terme $\mathbf{U_{n+1}}$ de la suite (U_n) à partir du terme précédent $\mathbf{U_n}$) :

$$\begin{cases} \mathbf{U_p} = \mathbf{a} \\ \mathbf{U_{n+1}} = f(\mathbf{U_n}) \text{ pour tout entier naturel } \mathbf{n} \geq \mathbf{p}. \end{cases}$$

- **Définition fonctionnelle de (U_n) :**

  Définition de la suite (U_n) à partir du calcul de $\mathbf{U_n}$ directement par son rang **n** (alors **n** ne devient plus seulement un rang, mais aussi une variable) :

$$\mathbf{U_n} = f(\mathbf{n})$$

  Le calcul de n'importe quel terme $\mathbf{U_{n+1}}$ peut se faire sans avoir besoin de connaître le terme précédent $\mathbf{U_n}$: il suffit de remplacer **n** par **n+1** dans la définition de (U_n).

- **Majorant :**

  Valeur **M** égale ou supérieure au maximum $\mathbf{U_{max}}$ de la suite (U_n) :

  $\mathbf{U_n} \leqslant \mathbf{U_{max}} \leqslant \mathbf{M}$ quel que soit $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$.

- **Minorant :**

  Valeur **m** égale ou inférieure au minimum $\mathbf{U_{min}}$ de la suite (U_n) :

  $\mathbf{m} \leqslant \mathbf{U_{min}} \leqslant \mathbf{U_n}$ quel que soit $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$.

- **Convergence :**

  Quand **n** tend vers +∞, les valeurs $\mathbf{U_n}$ tendent toutes vers une même valeur **L** :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{U_n} = \mathbf{L}$$

- **Divergence :**

  Quand **n** tend vers +∞, les valeurs $\mathbf{U_n}$ tendent vers +∞ **ou -∞, ou vers plusieurs valeurs différentes**.

- **Suite adjacente :**

  Une suite (V_n) est adjacente à la suite (U_n) si :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{V_n} = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{U_n}$$

1) *MONTRER QU'UNE SUITE EST ARITHMÉTIQUE :*

- La définition de la suite (par récurrence ou fonctionnelle) doit correspondre à l'une des formules de cours des suites arithmétiques.

- Pour une série de nombres, montrer que : $\mathbf{U_{n+1} - U_n = Constante} = \mathbf{r}$ (**r** = raison)

Faire ensuite un tableau :

$\mathbf{U_n}$	U_3	U_4	U_5	U_6
$\mathbf{U_{n+1}}$	U_4	U_5	U_6	U_7
$\mathbf{U_{n+1} - U_n}$	r	r	r	r

(données ; Calculées)

2) *MONTRER QU'UNE SUITE EST GÉOMÉTRIQUE :*

- La définition de la suite (par récurrence ou fonctionnelle) doit correspondre à l'une des formules de cours des suites géométriques.

- Pour une série de nombres, montrer que : $\dfrac{\mathbf{U_{n+1}}}{\mathbf{U_n}} = \mathbf{Constante} = \mathbf{q}$ (**q** = raison)

Faire ensuite un tableau :

$\mathbf{U_n}$	U_3	U_4	U_5	U_6
$\mathbf{U_{n+1}}$	U_4	U_5	U_6	U_7
$\dfrac{\mathbf{U_{n+1}}}{\mathbf{U_n}}$	q	q	q	q

(données ; Calculées)

3) *ÉTUDE DE VARIATION :*

- **SI :** $\mathbf{U_n} = f(\mathbf{n})$ *{Définition fonctionnelle de (U_n)}*

  ALORS : Faire l'étude de variation de f(**x**) sur [0 ; +∞[
  *(en général : **n** ≥ 0)*

- **SI :** $\mathbf{U_{n+1}} = f(\mathbf{U_n})$ *{Définition par récurrence de (U_n)}*

  ALORS : Étudier le SIGNE de $\mathbf{U_{n+1}} - \mathbf{U_n}$

  ou : **SI :** $\mathbf{U_n} > 0$, **ALORS :** étudier $\mathbf{U_{n+1}}/\mathbf{U_n}$

Explications :

CROISSANTE *signifie* $U_{n+1} > U_n$

- $- U_n$ → $U_{n+1} - U_n > 0$ (*différence* ***positive***)
- $/ U_n$ *et* $U_n > 0$ → $U_{n+1} / U_n > 1$

DÉCROISSANTE *signifie* $U_{n+1} < U_n$

- $- U_n$ → $U_{n+1} - U_n < 0$ (*différence* ***négative***)
- $/ U_n$ *et* $U_n > 0$ → $0 < U_{n+1} / U_n < 1$

CONSTANTE *signifie* $U_{n+1} = U_n$

- $- U_n$ → $U_{n+1} - U_n = 0$ (*différence* ***nulle***)
- $/ U_n$ *et* $U_n \neq 0$ → $U_{n+1} / U_n = 1$

4) *CONVERGENCE* :

- **SI :** $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_{n+1} - U_n) = 0$ (*OU SI :* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = 1$)

  ALORS : (U_n) est convergente.

- **SI :** $U_n = f(n)$ *{Définition fonctionnelle de (U_n)}*

  AVEC : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

  ALORS : (U_n) converge vers la limite **L**.

- ***Théorème des gendarmes :***

  SI : $V_n \leqslant U_n \leqslant W_n$ à partir d'un certain rang p_0 ($n \geq p_0$)

  ET SI : $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} W_n = L$

  ALORS : (U_n) converge vers la limite **L**.

- **SI :** (U_n) est $\begin{cases} \text{croissante et majorée} \\ \textit{ou :} \\ \text{décroissante et minorée} \end{cases}$

  ALORS : (U_n) est convergente.

5) *LIMITE DE CONVERGENCE* :

- **SI :** $\mathbf{U_n = f(n)}$ *{Définition fonctionnelle de (U_n)}*

  AVEC : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$

  ALORS : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{U_n} = \mathbf{L}$

- ***Théorème des gendarmes : voir ci-dessus.***

- **SI :** (U_n) est convergente vers **L**

  ALORS : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{U_{n+1}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{U_n} = \mathbf{L}$

  DONC : Remplacer *[dans la définition de (U_n) par récurrence]* $\mathbf{U_{n+1}}$ par **L** et $\mathbf{U_n}$ par **L**, puis résoudre cette équation :

Résumé schématique :

$\mathbf{U_{n+1}} = f(\mathbf{U_n})$

$\downarrow$ *(U_n) converge vers **L***

$\mathbf{L} = f(\mathbf{L})$ (à la limite quand $\mathbf{n} \to +\infty$)

$\downarrow$

Résoudre cette équation d'inconnue **L**

6) *DÉMONSTRATIONS PAR RÉCURRENCE* :

CAS GÉNÉRAL :	***EXEMPLE*** :
	$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n - 8}{5} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Hypothèse de récurrence sur U_n pour $n \geqslant p_0$. *(en s'aidant d'un graphique, de calculs… lorsqu'elle n'est pas directement donnée dans l'énoncé)*	*Hypothèse de récurrence :* $-2 < U_n < -1$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
Vérifie l'hypothèse **au rang $n = p_0$.**	*Au rang $n = 0$: $U_0 = -1$* *Au rang $n = 1$:* $U_1 = \dfrac{U_0 - 8}{5} = \dfrac{-1 - 8}{5}$ $U_1 = \dfrac{-9}{5}$ Or : $5 < 9 < 10$ $-5 > -9 > -10$ *(opposés)* $-1 > \dfrac{-9}{5} > -2$ $-1 > U_1 > -2$ *L'hypothèse est donc vérifiée à partir du rang $n = 1$.*
Suppose que l'hypothèse est **vraie à un rang $n = p$.**	*On suppose l'hypothèse vraie à un rang $n = p$:* $-2 < U_p < -1$
Vérifie l'hypothèse **au rang $n = p+1$** : - utiliser la définition de la suite (U_n) pour exprimer U_{p+1} **en fonction de U_p** , - **utiliser** ensuite **l'hypothèse** au rang $n = p$ (supposée vraie) **sur U_p** , - **faire apparaître** l'hypothèse **au rang $n = p+1$** pour U_{p+1} .	*Alors, au rang $n = p+1$:* $U_{p+1} = \dfrac{U_p - 8}{5}$ Or : $-2 < U_p < -1$ $-10 < U_p - 8 < -9$ $-2 < \dfrac{U_p - 8}{5} < \dfrac{-9}{5} < -1$ $-2 < U_{p+1} < -1$ *L'hypothèse est* ***héréditaire*** *au rang $n = p+1$.*
Conclus sur (U_n) pour $n \in \mathbb{N}$, $p \geqslant p_0$.	*Finalement, $-2 < U_n < -1$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.*