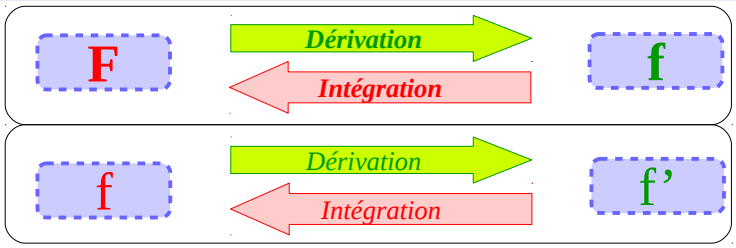
➢ Notations, vocabulaire :



De même :

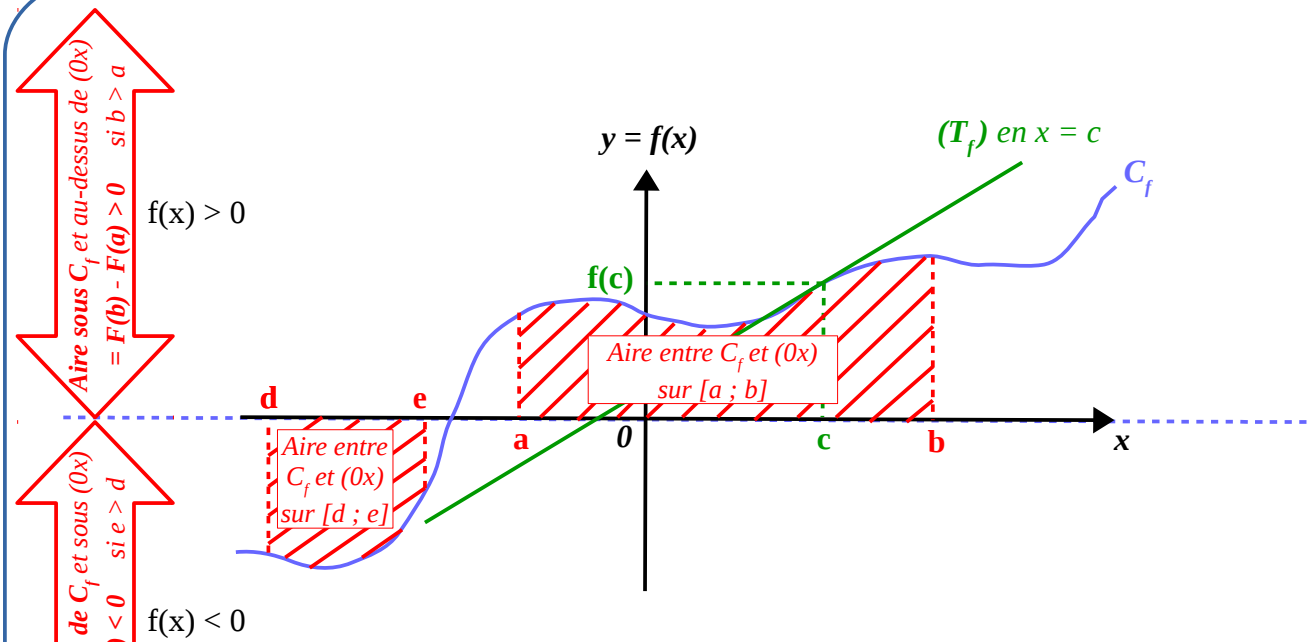
- **f est LA dérivée de F** ***(elle est unique)***
- **F est UNE primitive de f** ***(il y a une infinité de primitives égales à F à une constante k près)*** **:**

➔ $\boxed{F'(x) = f(x)}$ *ou inversement :* $\boxed{\int f(x).dx = F(x) + C}$ *(C : constante réelle)*

➔ **NB :** (F(x) + **C**)' = F'(x) + **C'** = F'(x) + **0** = f(x) *(la constante C ne change pas la dérivée f)*

➢ Signification géométrique :

- Rappel : f'(c) est aussi le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en x = c.
- En revanche : $\int_a^b f(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ est l'aire située entre la courbe de f et l'axe des abscisses, avec $x \in [a;b]$.
- Graphiquement :



Aires entre C_f et l'axe des abscisses :

$[F(x)]_d^e = F(e) - F(d) < 0$ car **f(x) < 0 sur [d ; e]** donc **F(x)** est **décroissante**

$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a) > 0$ car **f(x) > 0 sur [a ; b]** donc **F(x)** est **croissante**

Tangente (T_f) à C_f en x = c :

(T_f) : y = A.x + B avec : $\begin{cases} A = \mathbf{f'(c) = coefficient\ directeur\ de\ T_f} \text{ en } x = c \\ B = f(c) - c.f'(c) = \text{ordonnée à l'origine} \end{cases}$

➢ Formules de calcul de primitives :

***k* et *C* sont ici des *constantes* réelles**
u* et *v* sont ici des *fonctions de x *(pour simplifier on ne note pas u(x) ou v(x))*

Avant de commencer, il faut bien se rappeler que :

- **un facteur k peut être sorti du calcul de la primitive (il ne dérange pas !) :**
  $\int k.f(x).dx = k.\int f(x).dx = k.[F(x) + Cte] = k.F(x) + C$
- **la primitive d'une somme de fonctions est la somme des primitives de ces fonctions :**
  $\int (u(x) + v(x)).dx = \int u(x).dx + \int v(x).dx$

- $\frac{1}{a} = a^{-1}$; plus généralement : $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
- Par ailleurs : $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ → plus généralement : $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ *(hors programme)*

FONCTION DÉRIVÉE **F'(x)** = f(x) = (…)	**PRIMITIVE** **F(x)** = (…)	Commentaires :
• x^n	$\frac{1}{n+1}.x^{n+1} + C$	☺ Si **f(x) = 7** = $7.x^0 \rightarrow F(x) = 7.\frac{x^1}{1} + C$ donc : $F(x) = 7.x + C$ ☺ Si **f(x) = x** = $x^1 \rightarrow F(x) = \frac{1}{2}.x^2 + C$ ☺ Si f(x) = $3.x^2 \rightarrow F(x) = x^3 + C$
• $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{-1}{(n-1)}.\frac{1}{x^{n-1}} + C$	**<u>ATTENTION</u> : vrai pour n ⩾ 2 !** *NB : Cette formule est un cas particulier de la précédente… (remplacer n par –n)* ☺ Si $f(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow F(x) = -\frac{1}{x} + C$ ☺ Si $f(x) = \frac{3}{x^3} \rightarrow F(x) = -\frac{3}{2}.\frac{1}{x^2} + C$
• $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{-0,5}}$	$2\sqrt{x} = 2.x^{0,5}$	*NB : déduite de la précédente... (avec n = $\frac{1}{2}$)*
• $\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
• $\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
• $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + C$	*NB :* $\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
• e^x	$e^x + C$	
• $\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	

Généralisation des formules :

FONCTION DÉRIVÉE **F'(x)** = f(x) = (…)	PRIMITIVE **F(x)** = (…)	Commentaires :
• **v' . u'(v)** $= v'.u' \circ v$	**u(v) + C** $= u \circ v + C$	**Formule générale** (composition de fonctions) permettant de généraliser les formules précédentes : u devient une fonction de v(x).
• **u'. u^n**	$\frac{1}{n+1}.u^{n+1} + C$	Si f(x) = 6x².(x³ + 2)² → soit : u(x) = x³ + 2 alors : u'(x) = 3x² donc : f(x) = 2.u'.u² Primitive : $F(x) = 2.\frac{1}{3}.u^3 + C$ Finalement : $F(x) = \frac{2}{3}.(x^3 + 2)^3 + C$
• $\frac{v'}{v^n}$	$\frac{-1}{(n-1)}.\frac{1}{v^{n-1}} + C$	**<u>ATTENTION</u> : vrai pour n ⩾ 2 !** *NB : Cette formule est un cas particulier de la précédente… (remplacer n par -n)*
• $\frac{v'}{\sqrt{v}} = \frac{v'}{v^{0,5}}$	$2\sqrt{v} = 2.v^{0,5}$	*NB : déduite de la précédente... (avec n = $\frac{1}{2}$)*
• **u'.v + u.v'**	**u.v + C**	*NB : Cette relation est à la base de la méthode d'**intégration par parties** (Cf. ci-dessous).*
• $\frac{u.v' - u.v'}{v^2}$	$\frac{u}{v} + C$	
• $u'.\cos(u)$	$\sin(u) + C$	
• $u'.\sin(u)$	$-\cos(u) + C$	
• $\frac{u'}{\cos^2(u)}$ $= u'.(1 + \tan^2(u))$	$\tan(u) + C$	
• **u'.e^u**	**e^u + C**	
• $\frac{v'}{v}$	**ln (v) + C**	

➢ **Calculer une fonction primitive <u>UNIQUE</u> F(x) à partir d'une fonction f(x) et d'une condition :**

Si je veux trouver <u>LA</u> fonction F(x) unique (donc <u>connaître sa constante k</u>) d'une fonction f(x), **il faut que je connaisse :**

- ✔ **l'équation de f(x)**
- ✔ **une condition sur F(x) se résumant à F(a) = F_0 = constante**

Exemple :

« f(x) = 2x, et je sais que sa primitive F(x) passe par le point M(3 ; 10).
Trouve la primitive F(x) de la fonction f. »

✔ L'équation de f(x) me permet alors de calculer F(x), connu à une constante k près :
$F(x) = x^2 + k$ avec : $k \in \mathbb{R}$

✔ M(3 ; 10) = M(3 ; F(3)) donc cette condition me permet de trouver k :
$F(3) = 10$
$3^2 + k = 10$
$k = 10 - 9 = 1$

Conclusion : $F(x) = x^2 + 1$

➢ De l'aire à la notion d'intégration – Relations principales :

- **La constante C n'a plus aucune importance lorsqu'on calcule l'intégrale** d'une fonction entre 2 bornes a et b :

$$\int_a^b f(x).dx = [F(x) + C]_a^b = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \text{ donc :}$$

$$\int_a^b f(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \rightarrow \int_a^a f(x).dx = 0$$

- **Si j'inverse les bornes d'intégration, l'intégrale change de signe** :

$$\int_b^a f(x).dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -[F(x)]_a^b = -\int_a^b f(x).dx \text{ donc :}$$

$$\int_b^a f(x).dx = -\int_a^b f(x).dx$$

- Comme indiqué ci-dessus, **un facteur k peut être sorti du calcul d'une intégrale (<u>il ne dérange pas</u> !) :**

$$\int_a^b k.f(x).dx = k.\int_a^b f(x).dx = k.[F(x)]_a^b = k.[F(b) - F(a)]$$

- Comme indiqué ci-dessus, **l'intégrale d'une somme égale la somme des intégrales** :

$$\int_a^b (f(x)+g(x)).dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx = [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b = [F(x) + G(x)]_a^b$$

- On peut découper le domaine d'intégration [a ; b] en deux (ou plus) si nécessaire :

$[a ; b] = [a ; c] \cup [c ; b]$ d'où :
$[F(b) - F(a)] = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)]$
$[F(x)]_a^b = [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b$

$$\boxed{\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx}$$ → **Relation de Chasles**

(Cela revient graphiquement à séparer en deux verticalement l'aire d'intégration, en x = m)

➢ **Inégalités :**

f et **g** sont deux fonctions **continues** sur un intervalle **I**, avec $[a\ ;\ b] \in I$.

- $\forall x \in [a\ ;\ b]$, si $f(x) \geqslant 0$, alors : $\int_a^b f(x).dx \geqslant 0$ *(Voir graphique au début)*

  Démonstration :
  Si $f(x) \geqslant 0$ sur [a ; b], alors la fonction première F est croissante sur [a ; b].
  Or : $\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$, $b \geqslant a$ et F est croissante sur [a ; b]
  donc : $F(b) \geqslant F(a)$.

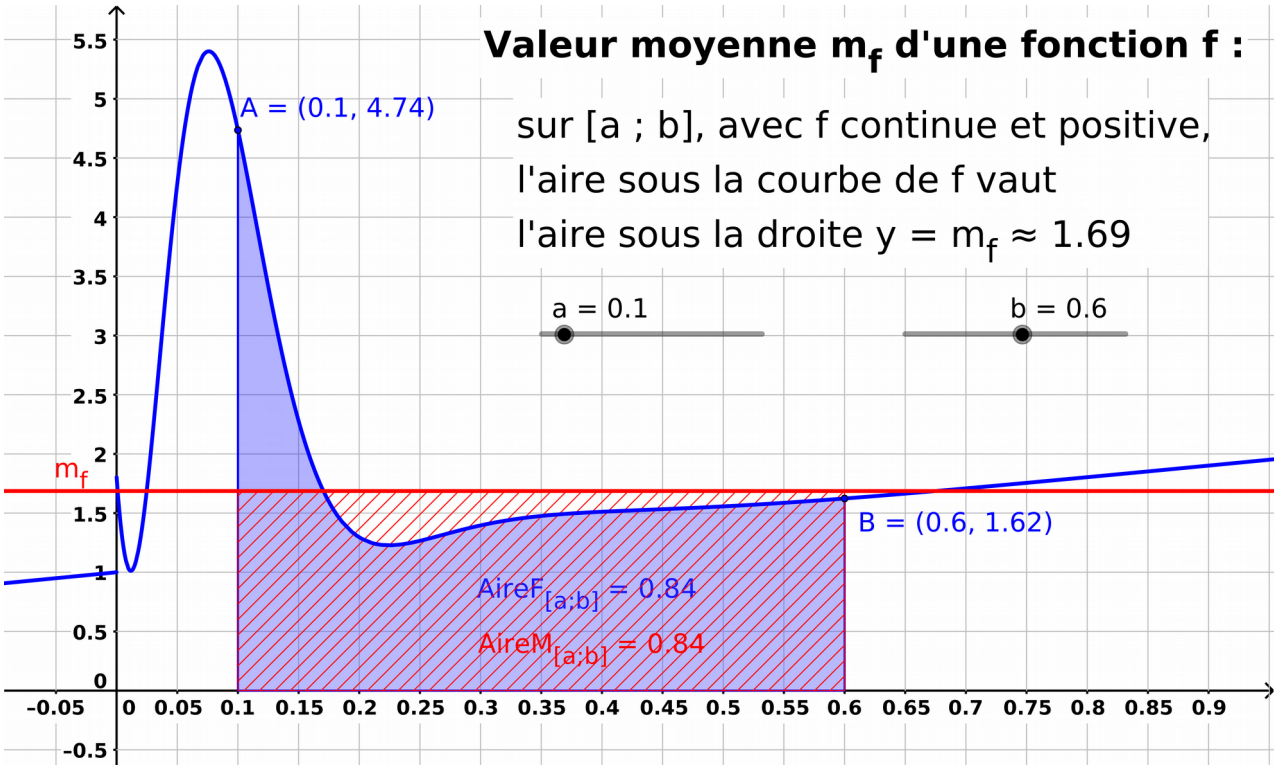
- $\forall x \in [a\ ;\ b]$, si $f(x) \geqslant g(x)$, alors : $\int_a^b f(x).dx \geqslant \int_a^b g(x).dx$ *(C_f « au-dessus » de C_g)*

➢ **Valeur moyenne d'une fonction :**

Soit **f** une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle **[a ; b]**, avec $a \neq b$.

On appelle **valeur moyenne** de f sur [a ; b] le réel : $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx$

Signification graphique :
Aire sous la courbe représentative de f = Aire sous la droite d'équation y = m →
$\int_a^b f(x).dx = m.(b-a)$



➢ Intégration par parties :

Cette méthode permet de résoudre certains calculs de primitive ou d'intégrale lorsque les formules fondamentales ne permettent pas un calcul direct.

Je sais d'après les formules que : $\int_a^b (u'(x).v(x) + u(x).v'(x)).dx = [u(x).v(x)]_a^b$

Je sais que je peux remplacer le premier membre par la somme des intégrales :

$$\int_a^b u'(x).v(x).dx + \int_a^b u(x).v'(x).dx = [u(x).v(x)]_a^b$$

J'en déduis la relation suivante, en simplifiant l'expression (« (x) » éclipsés !) :

$$\int_a^b u'.v.dx = [u.v]_a^b - \int_a^b u.v'.dx$$

<u>Exemple</u> : « Calcule l'intégrale sur [a ; b] de la fonction ln (x). »

A priori, je n'ai pas de formule : la méthode directe est impossible.
Essayons l'intégration par partie. **Je <u>choisis</u> :**

$$\begin{cases} u(x) = x \\ \mathbf{u'(x) = 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{v(x) = \ln x} \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

En utilisant l'intégration par partie, je peux alors écrire :

$$\int_a^b \ln(x).dx = \int_a^b \mathbf{1}.\ln(x).dx = \int_a^b u'.v.dx = [u.v]_a^b - \int_a^b u.v'.dx$$

$$\int_a^b \ln(x).dx = [x.\ln(x)]_a^b - \int_a^b x.\frac{1}{x}.dx = [x.\ln(x)]_a^b - \int_a^b 1.dx$$

$$\int_a^b \ln(x).dx = [x.\ln(x)]_a^b - [x]_a^b$$

D'où : $\int_a^b \ln(x).dx = [x.\ln(x) - x]_a^b$ ***(La primitive de ln(x) est : x.ln(x) – x + C).***

➢ Intégrales ou primitives particulières:

- $\int_a^b ln(x).dx = [x.ln(x) - x]_a^b$

- **Sur]-1 ; 1[:** $\int_a^b \frac{1}{1 - x^2}.dx = \left[\frac{1}{2}.ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)\right]_a^b$

  <u>Remarque</u> : pour aller plus loin, il existe une fonction appelée « tangente hyperbolique » *et notée* « tanh » *(dont antécédents et images appartiennent à]-1 ; 1[ ). La fonction inverse de* tanh *peut être notée* « $\tanh^{-1}$ ». *On a alors :* $tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}.ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$ *sur]-1 ; 1[.*

-

- ***Linéarité :***
  - $\int k.f(x).dx = k.\int f(x).dx$
  - $\int (u(x) + v(x)).dx = \int u(x).dx + \int v(x).dx$

- ***Intégrales :***
  - $\int_a^b f(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \rightarrow \int_a^a f(x).dx = 0$
  - $\int_b^a f(x).dx = -\int_a^b f(x).dx$
  - $\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx$ sur $[a\,;\,b] = [a\,;\,c]\cup[c\,;\,b]$ ***(relation de Chasles)***
  - $\int_a^b u'.v.dx = [\,u.v\,]_a^b - \int_a^b u.v'.dx$ ***(intégration par parties)***

- ***Formules :***

FONCTION DÉRIVÉE $F'(x) = f(x)$	*Intégration* →	**PRIMITIVE** $F(x)$
Formule générale *(composition de fonctions) :*		
$v'.u'(v) = v'.u'\circ v$		$u(v) + C = u\circ v + C$
avec facteurs :		
$u'.u^n$		$\frac{1}{n+1}.u^{n+1} + C$
$u'.v + u.v'$		$u.v + C$
avec dénominateurs :		
$\frac{u.v' - u.v'}{v^2}$		$\frac{u}{v} + C$
ATTENTION → **vrai pour** $n \geqslant 2$ **:**		
$(*: n \geqslant 2)$ $\frac{v'}{v^n}$ (*)		$\frac{-1}{(n-1)}.\frac{1}{v^{n-1}} + C$
$(*: n = \frac{1}{2})$ $\frac{v'}{\sqrt{v}} = \frac{v'}{v^{0,5}}$		$2\sqrt{v} = 2.v^{0,5}$
concernant logarithmes et exponentielles :		
$(*: n = 1)$ $\frac{v'}{v} = \frac{v'}{v^1}$		$\ln(v) + C$
$u'.e^u$		$e^u + C$
concernant la trigonométrie :		
$u'.\cos(u)$		$\sin(u) + C$
$u'.\sin(u)$		$-\cos(u) + C$
$\frac{u'}{\cos^2(u)} = u'.(1 + \tan^2(u))$		$\tan(u) + C$

(*) Trois cas de la forme : v'/v^n

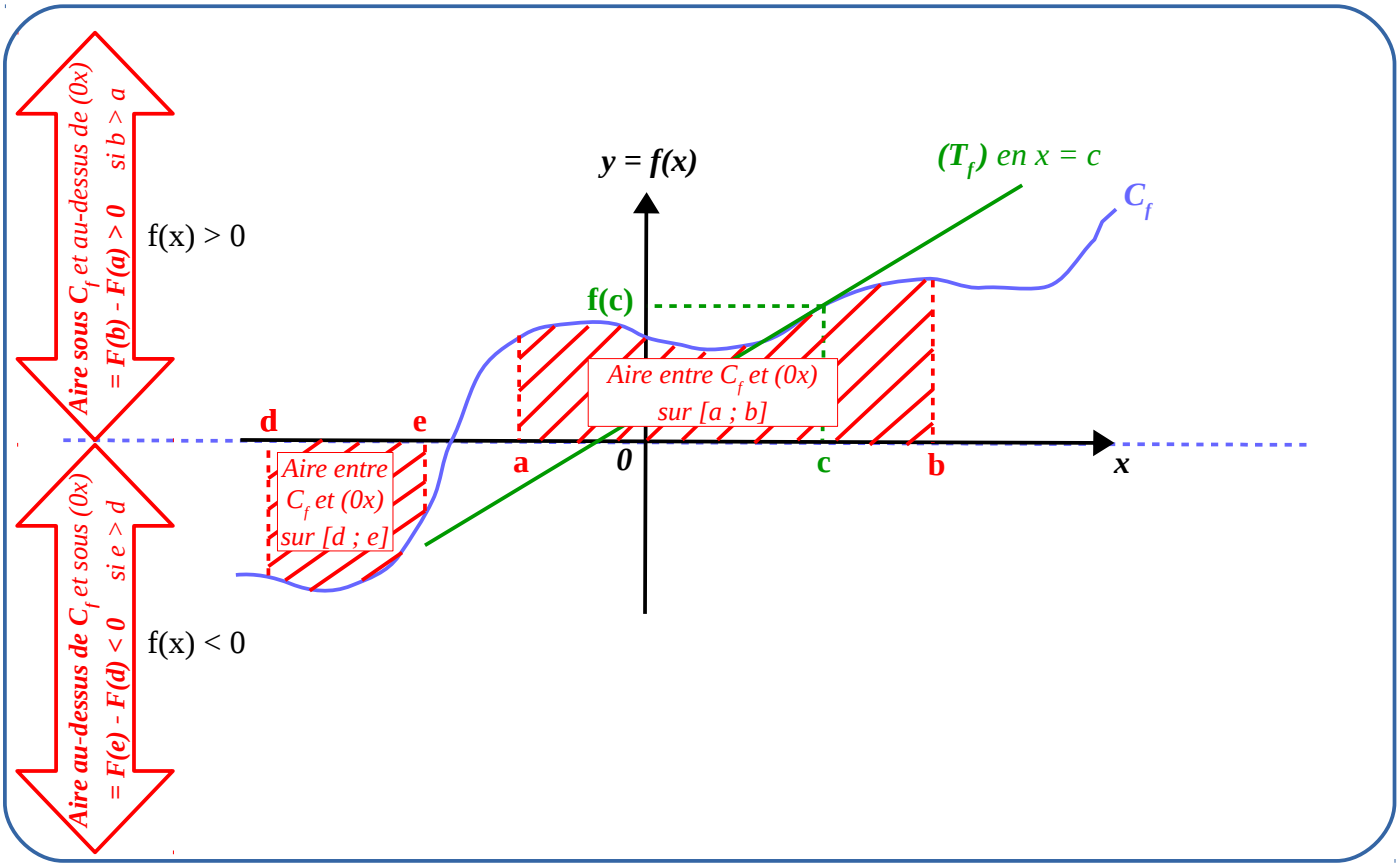
➢ *Inégalités* :

f et **g** sont deux fonctions **continues** sur un intervalle **I**, avec $[a\ ;\ b] \in I$.

- $\forall x \in [a\ ;\ b]$, si $f(x) \geqslant 0$, alors : $\int_a^b f(x).dx \geqslant 0$
- $\forall x \in [a\ ;\ b]$, si $f(x) \geqslant g(x)$, alors : $\int_a^b f(x).dx \geqslant \int_a^b g(x).dx$ *(C_f « au-dessus » de C_g)*

➢ *Significations géométriques* :

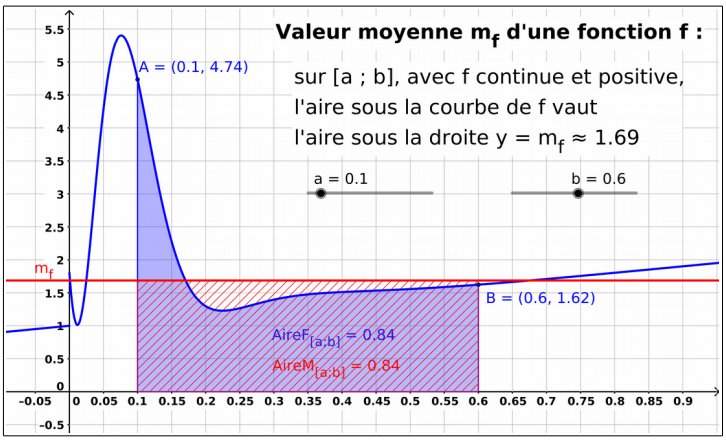
- Rappel : f'(c) est aussi le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe de f en x = c.
- En revanche : $\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$ = **Aire située entre C_f et l'axe (0x), $x \in [a\ ;b]$**
- Graphiquement :



➢ *Valeur moyenne d'une fonction* :

Soit **f** une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle **[a ; b]**, avec $a \neq b$.

On appelle **valeur moyenne** de f sur [a ; b] le réel : $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx$.

Signification graphique :

Aire sous la courbe C_f
=
Aire sous la droite d'équation : y = m