Ex : Pile ou face
n lancers
x = 0 : pile (échec)
x = 1 : face (succès)
p = 0,5 (succès)

Ex : Appareil en bon ou mauvais état ?
n = 1000 sorties d'usine
x = 0 : défaut (échec)
x = 1 : fonctionnel (succès)
p = 0,1

THÉORÈME :
Pour tout $\alpha \in]0\ ;\ 1[$, il existe un **unique réel** $U_\alpha > 0$ tel que :
$P(-U_\alpha \leqslant X \leqslant U_\alpha) = 1-\alpha$
→
$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow u_{0,05} \approx 1{,}96$
$1-\alpha = 0{,}99 \rightarrow u_{0,01} \approx 2{,}58$

Contexte :
n essais (échantillon)
2 issues : $x \in \{0\ ;\ 1\}$
p : probabilité de succès (x = 1)
$X_n = k \in [0\ ;\ n]$

Contexte :
n = taille de l'échantillon
2 issues : $x \in \{0\ ;\ 1\}$
p : probabilité de succès (x = 1)
$X_n = k \in [0\ ;\ n]$

B_p *Schéma / Loi de Bernoulli*

n = 1 essai

B(n ; p)
Loi binomiale

Approximation continue si :
$n \geqslant 30$
$n.p \geqslant 5$
$n.(1-p) \geqslant 5$

N(μ ; σ²)
Loi normale

$\begin{cases} \mu = 0 \\ \sigma = 1 \end{cases}$
ou :
$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

N(0 ; 1)
Loi normale centrée réduite

Grandeurs :
$E(X=1) = p$ succès *(espérance)*
$V(X_n) = p.(1-p)$ *(variance)*
$\sigma = \sqrt{p.(1-p)}$ *(écart-type)*

$P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$

Grandeurs :
$E(X_n) = n.p$ *(espérance)*
$V(X_n) = n.p.(1-p)$ *(variance)*
$\sigma(X_n) = \sqrt{n.p.(1-p)}$ *(écart-type)*

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k.(1-p)^{n-k}$$

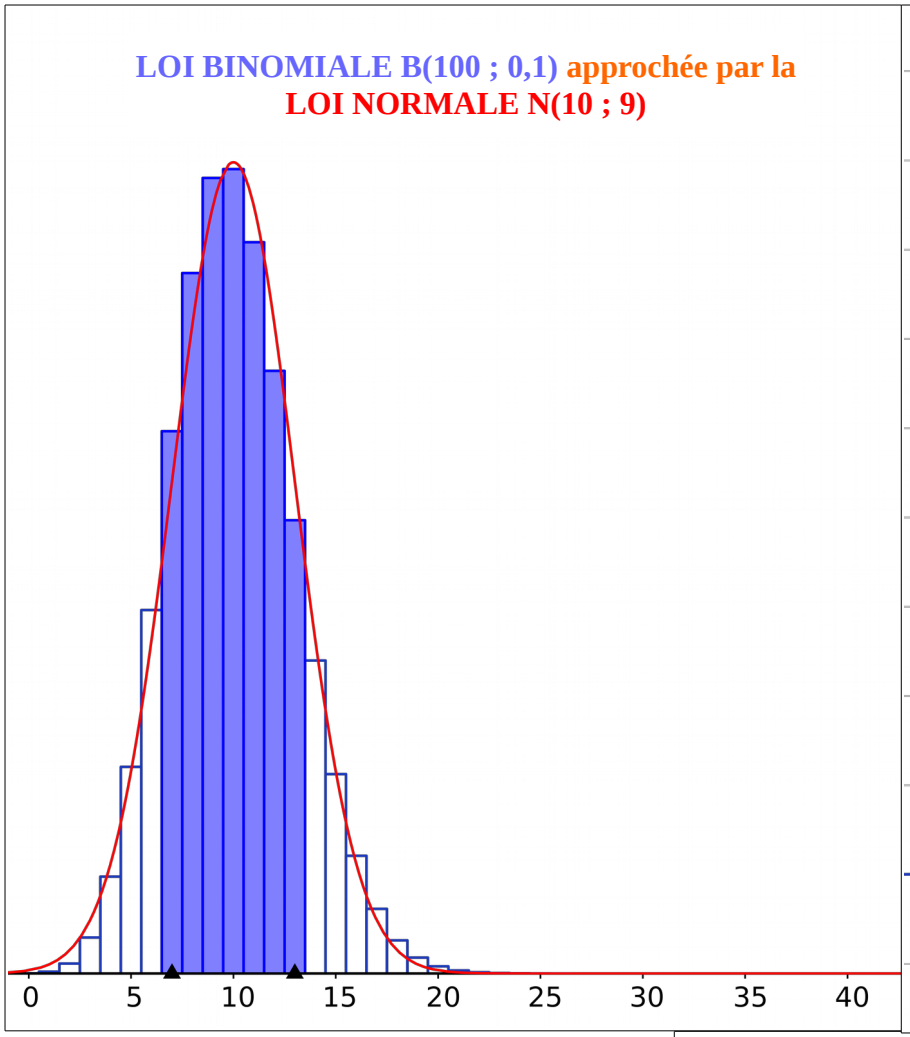
Grandeurs :
$\mu = n.p$ *(espérance)*
$\sigma^2 = n.p.(1-p)$ *(variance)*
$\sigma = \sqrt{n.p.(1-p)}$ *(écart-type)*

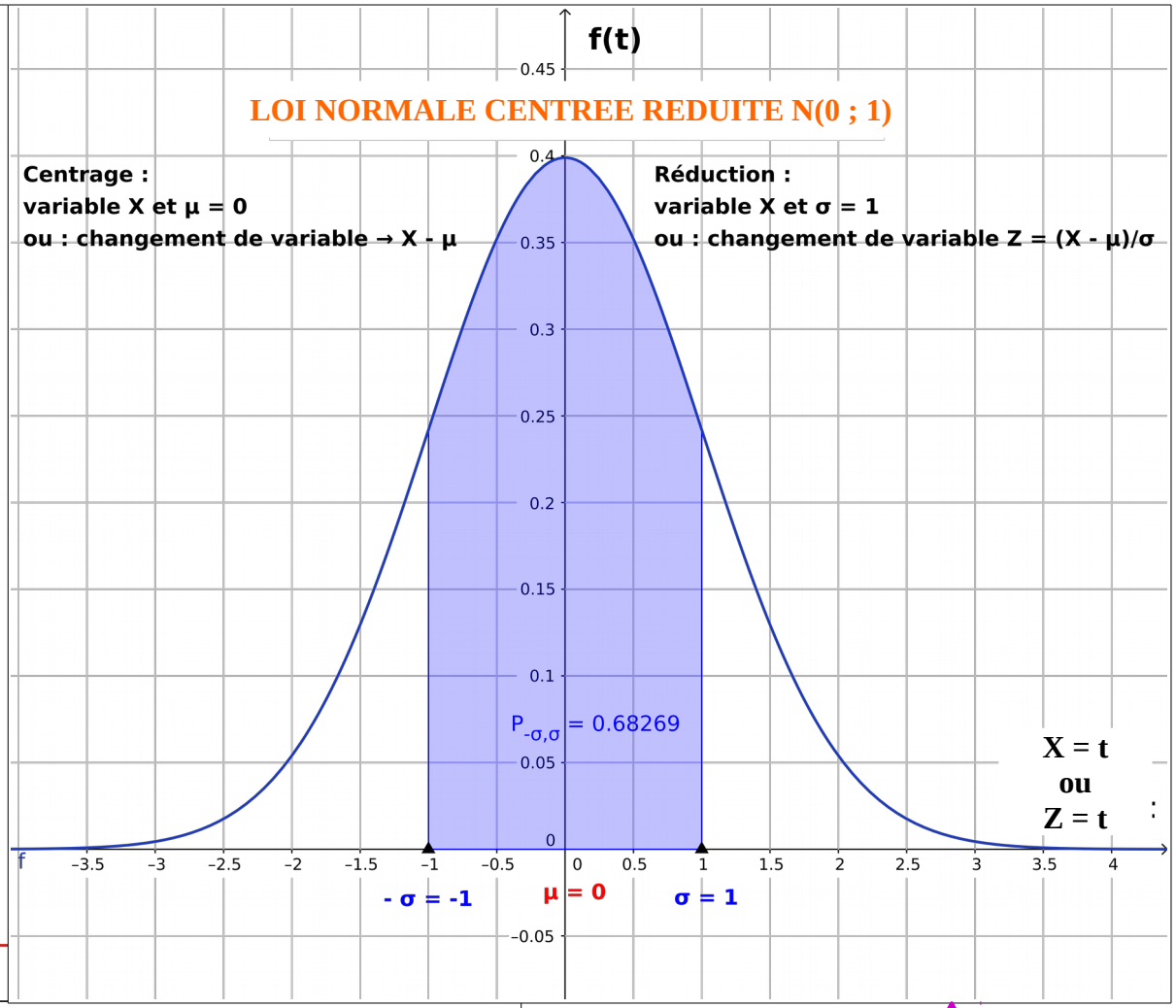
$$P(a_X \leqslant X \leqslant b_X) = \int_{a_X}^{b_X} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.dx$$

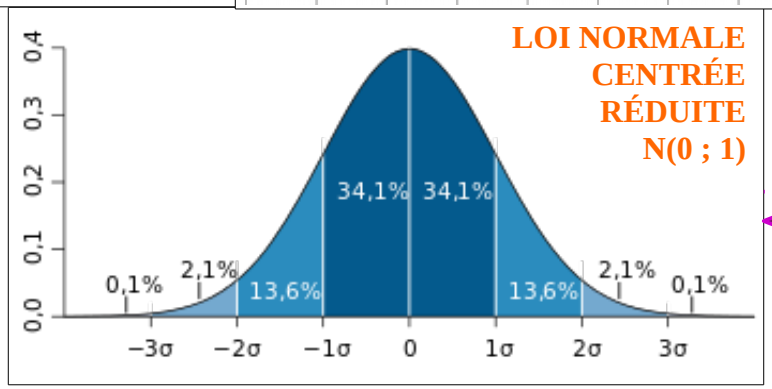
Théorème de Moivre-Laplace $n \rightarrow +\infty$ **:**

$$P(a_X \leqslant X \leqslant b_X) = P(a_Z \leqslant Z \leqslant b_Z) \approx \int_{a_Z}^{b_Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt$$

NB : Si $\mu = 0$ **et** $\sigma = 1$ → $Z = X$; $a_Z = a_X$; $b_Z = b_X$







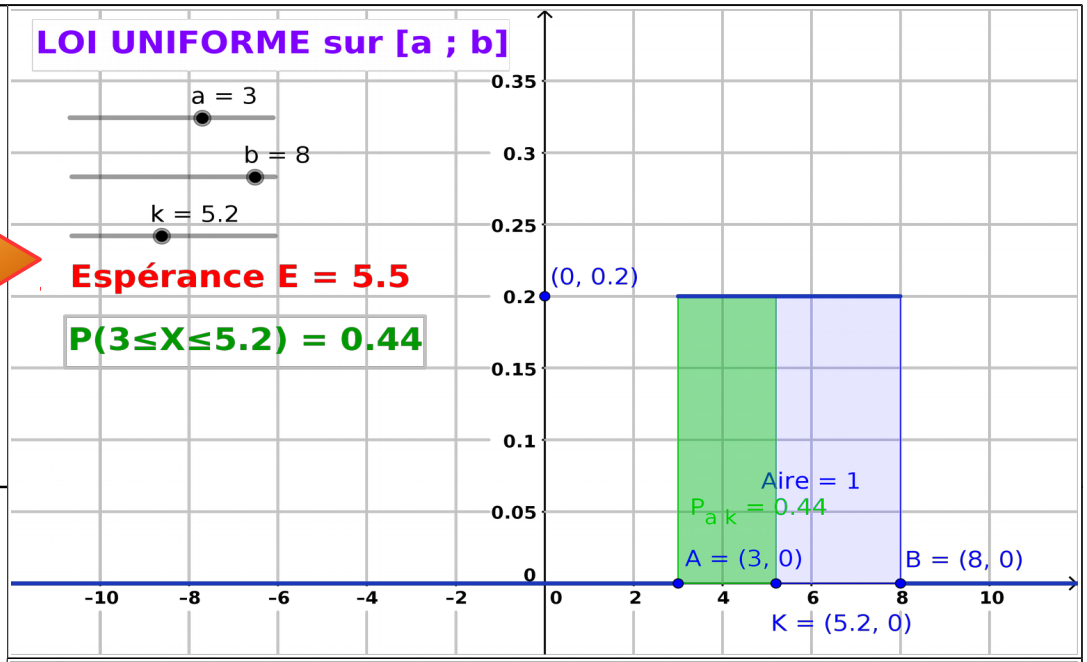
$$P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0{,}683$$
$$P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0{,}954$$
$$P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$$

- **Loi uniforme** (notée : **U([a ; b])**) :
  I = [a ; b]

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$ (fonction constante)

$$P(a \leqslant X \leqslant x) = \frac{x-a}{b-a}$$ avec $x \in [a\ ;\ b]$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$



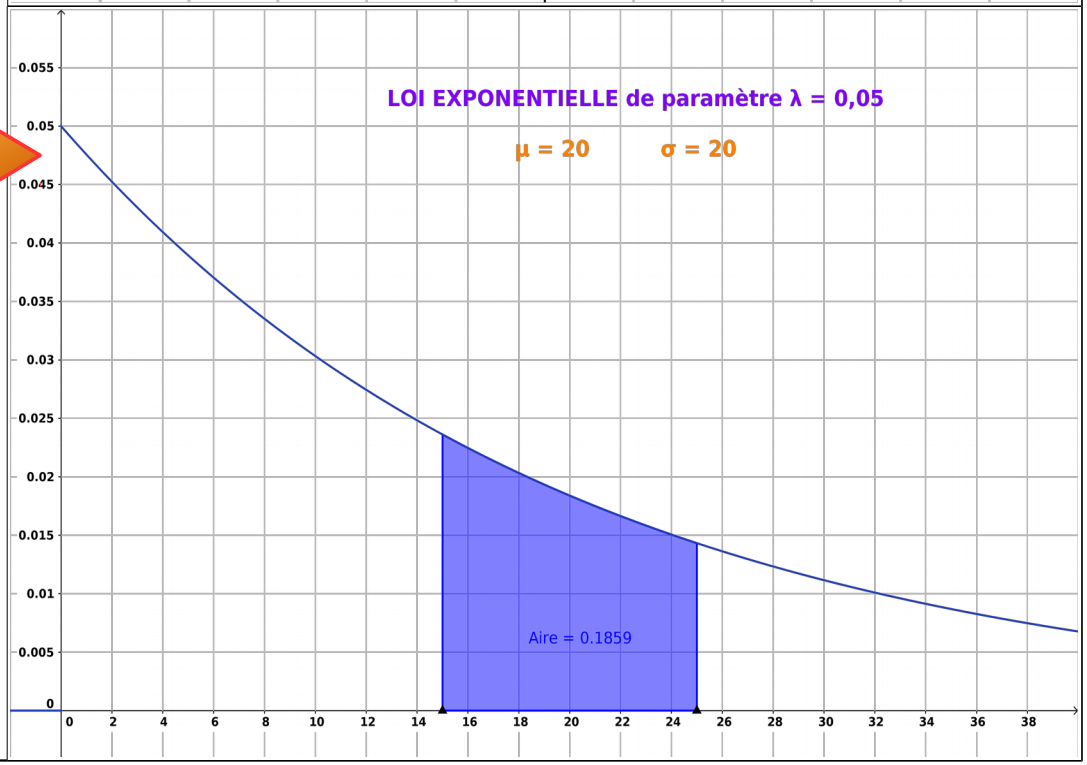
- **Durée de vie et lois exponentielles de paramètre λ** :
  I = [0 ; +∞[

$$f(x) = \lambda . e^{-\lambda . x}$$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

$$P(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda . t}$$ pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$

$$P(X \geqslant t) = e^{-\lambda . t}$$ pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$

$$P([a\ ;\ b]) = e^{-\lambda . a} - e^{-\lambda . b}$$



➢ **Durée de vie sans vieillissement :**

- « **X ≥ t** » est l'événement « **la durée de vie dépasse t années** »
- On dit que la durée de vie est « sans vieillissement » lorsque la probabilité qu'il fonctionne encore h heures supplémentaires, sachant qu'il fonctionne à l'instant t, ne dépend pas de t.
  La durée de vie sur une période h ne dépend pas de l'âge t à partir duquel on considère cet événement.
- Pour tout t et h positifs : $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$
- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

ÉCHANTILLONNAGE :

je connais p

ou

je peux faire une hypothèse raisonnable sur p

► Conditions de validité :

(celles de la loi $N(\mu\ ;\ \sigma^2)$)

$n \geqslant 30$ ***(n assez grand)***

$n.p \geqslant 5$

$n.(1-p) \geqslant 5$

(p pas trop proche de 0 ou 1)

*NB : **plus n augmente plus l'intervalle I_n se resserre.***

THÉORÈME :

$\alpha \in]0\ ;\ 1[$ $\qquad$ X_n **suit B(n ; p)**

$$I_n = \left[p - u_\alpha.\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + u_\alpha.\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

est « **l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence F_n au seuil $1 - \alpha$** » (**$1 - \alpha = 0{,}95$** *en général*).

On a alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(F_n \in I_n) = 1 - \alpha$

La proportion **p est connue**

Je peux calculer l'intervalle I_n dans lequel F_n a 95 % de se trouver.

Je peux faire une **hypothèse raisonnable sur p**

PRISE DE DÉCISION :

Je considère la fréquence observée (je change de notation : $F_n \to f$)

L'**hypothèse sur p** permet de **calculer I_n** au seuil **95 %**.

Cette hypothèse est :

→ **acceptée si $f \in I_n$**

→ **rejetée si $f \notin I_n$**

Grandeurs :

► Variable aléatoire $X_n = k$

dénombrant le nombre de **succès k** parmi un **échantillon de n essais**, et qui suit une **loi binomiale B(n ; p)**.

► Variable aléatoire fréquence de succès

$F_n = \dfrac{X_n}{n}$ suivant le **schéma de Bernoulli** de paramètres **n et p**.

ESTIMATION :

je ne peux connaître ni faire une hypothèse raisonnable sur p

*NB : **plus n augmente plus l'intervalle J_n se resserre.***

► Conditions de validité :

(p inconnu ici : $p \to f$)

$n \geqslant 30$ ***(n assez grand)***

$n.f \geqslant 5$

$n.(1-f) \geqslant 5$

DÉFINITION :

Soit **f une fréquence observée** du du caractère étudié sur un **échantillon de taille n. X_n suit B(n ; p)**.

On appelle « **intervalle de confiance** de p au **niveau de confiance 95 %** » :

$$J_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

p inconnue (hypothèse impossible)

Connaissant f, je peux **calculer J_n** → je sais à **95% que p est dans J_n**