CORRIGÉ

Exercice 1 *[7 points]*

(A)

A.1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

L'exponentielle l'emporte sur tout polynôme quand $x \to +\infty$, d'où :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$

$\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0}$

A.2) $h'(x) = e^{-x} + (-x.e^{-x}) = (1 - x).e^{-x}$ continue et définie sur $[0 ; +\infty[$.

Or :

$h(1) = 1.e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0 \times e^{0} = 0 \times 1 = 0$

D'où le tableau de variations :

x	**0**		**1**		**+∞**
e^{-x}		+		+	
1 – x		+	**0**	–	
h'(x)		+	**0**	–	
h(x)	**0**	↗	**$\frac{1}{e}$**	↘	**0**

A.3) Soit H la fonction primitive de h.

A.3.a) $\left.\begin{array}{l} h(x) = x.e^{-x} \\ h'(x) = e^{-x} - x.e^{-x} \end{array}\right\}$ définie sur $[0 ; +\infty[$, donc :

$h'(x) = e^{-x} - h(x)$, définie sur $[0 ; +\infty[$.

A.3.b) Sur $[0 ; +\infty[$, une primitive de $x \longmapsto e^{-x}$ est : **$x \longmapsto -e^{-x}$**

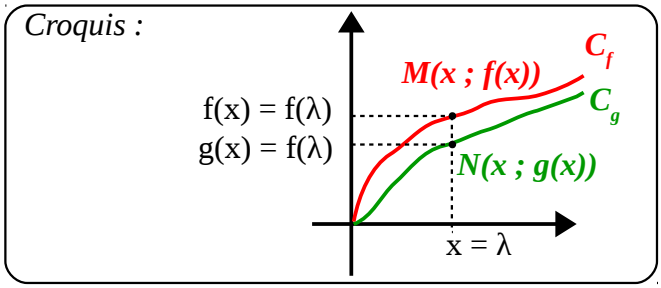
A.3.c)

$$\begin{aligned} H(x) &= \int h(t).dt \quad \text{avec : } x \in [0 ; +\infty[\\ &= \int (e^{-t} - h'(t)).dt \\ &= \int e^{-t}.dt - \int h'(t).dt \quad \textit{(linéarité de l'intégration)} \\ &= -e^{-x} - h(x) + C , \quad \text{avec C une constante réelle, d'où :} \\ H(x) &= -e^{-x} - x.e^{-x} + C \quad \text{donc :} \end{aligned}$$

$H(x) = -e^{-x} - x.e^{-x}$ est une primitive de h(x).

(B) $\left.\begin{array}{l} f(x) = h(x) + \ln(x+1) = h(x) + g(x) \\ g(x) = \ln(x+1) \end{array}\right\}$ définie sur $[0 ; +\infty[$.

B.1) *Croquis :*

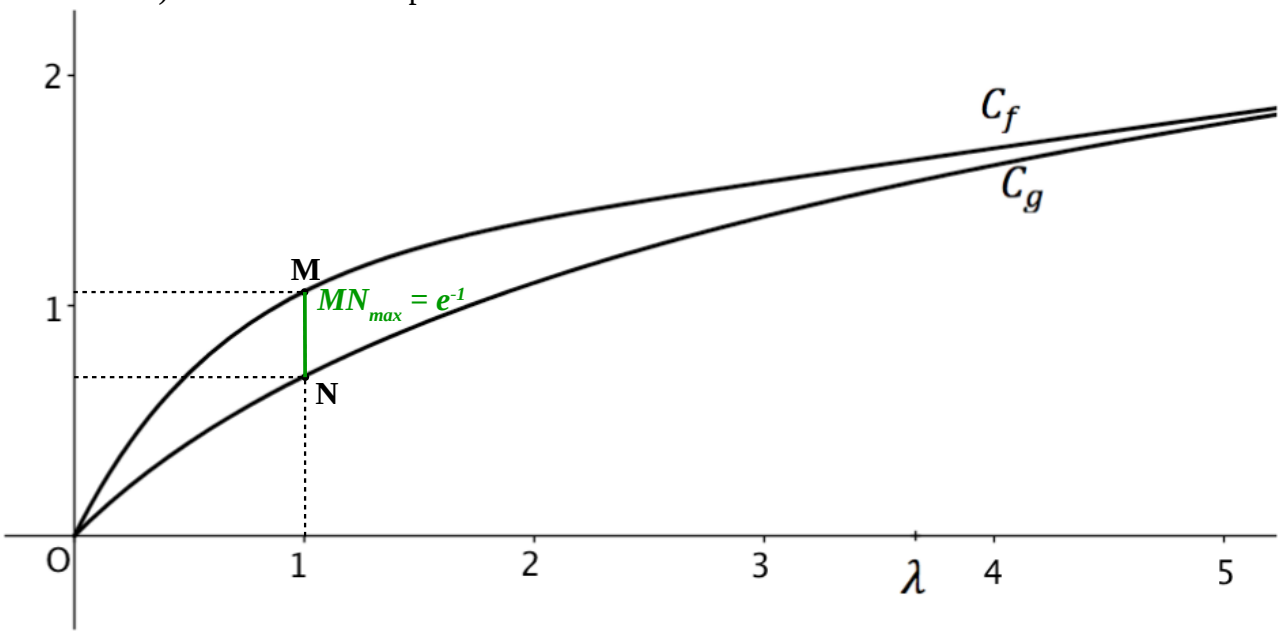


B.1.a) MN = f(x) – g(x) = h(x) *(distance verticale pour x donné)*

or h(x) atteint sa valeur maximale en x = 1 : $h(1) = \frac{1}{e}$ *(Cf. A.2))*

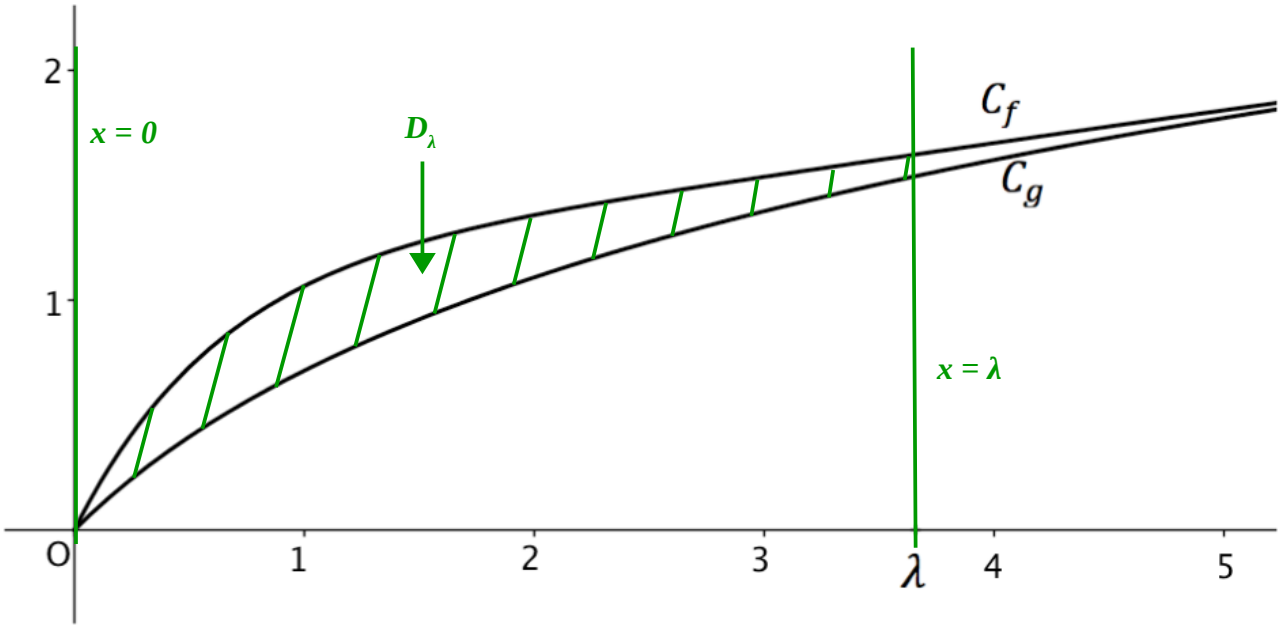
Donc MN est maximale ($MN = \frac{1}{e}$) quand x = 1.

B.1.b) Placement des point en x = 1 :



B.2) $\lambda \in [0\ ;\ +\infty[$ et $(x;y) \in D_\lambda$ pour : $\begin{cases} x \in [0\ ;\ \lambda[\\ g(x) \leqslant \lambda \leqslant f(x) \end{cases}$

B.2.a) d



B.2.b) $A_\lambda = \int_0^\lambda (f(x) - g(x)).dx$

$A_\lambda = \int_0^\lambda h(x).dx$

$A_\lambda = H(\lambda) - H(0)$ *(Cf. A.3.c))*

$A_\lambda = -(1+\lambda)e^{-\lambda} + (1+0)e^{-0}$

$A_\lambda = -\frac{1+\lambda}{e^\lambda} + 1\times 1$ donc :

$\mathbf{A_\lambda = 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}}$ **avec : $\lambda \in [0\ ;\ +\infty[$.**

B.2.c) $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda+1}{e^\lambda} = 0 = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda}{e^\lambda} = 0^+$ $(\lambda \geqslant 0)$, donc :

$\mathbf{\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = 1}$, or :

$A_0 = 1 - \frac{0+1}{e^0} = 0$

De x = 0 à x = λ , l'aire A_λ entre C_f et C_g , tend *(ou converge)* **vers 1 u.a. quand $\lambda \to +\infty$ (h est donc une fonction normée sur [0 ; +∞[ ).**
Autrement dit : $A_\lambda \in [0\ ;\ 1[$ pour $\lambda \in [0\ ;\ +\infty[$, cette surface augmentant avec λ.

B.3)

B.3.a) *Utilisation possible des algorithmes sur calculatrice programmable.*

De façon plus analogique :

Variables : $\begin{cases} \lambda \in [0\ ;\ +\infty[\\ S \in [0\ ;\ 1] \end{cases}$

Initialisations : $\begin{cases} S = 0{,}8 \\ \lambda = 0 \end{cases}$

Traitement :

$1 - \frac{0{,}8+1}{e^{0{,}8}} \approx 0{,}19 < S \rightarrow$ *Test négatif*

$\begin{cases} \lambda = 0{,}8+1 = 1{,}8 \\ 1 - \frac{1{,}8+1}{e^{1{,}8}} \approx 0{,}537 < S \rightarrow \end{cases}$ *Test négatif*

$\begin{cases} \lambda = 1{,}8+1 = 2{,}8 \\ 1 - \frac{2{,}8+1}{e^{2{,}8}} \approx 0{,}769 < S \rightarrow \end{cases}$ *Test négatif*

$\begin{cases} \lambda = 2{,}8+1 = 3{,}8 \\ 1 - \frac{3{,}8+1}{e^{3{,}8}} \approx 0{,}893 > S \rightarrow \end{cases}$ <u>Test positif</u> (fin de boucle)

Sortie : **λ = 3,8**

B.3.b) $S = A_\lambda \in [0\ ;\ 1[\ \subset [0\ ;\ 1]$

On trouve en sortie de l'algorithme une valeur de λ supérieure à celle pour laquelle $S = A_\lambda = 0{,}8$ u.a. . Or λ est incrémenté de 1 à chaque bouclage (traitement).

Cet algorithme nous offre donc un encadrement à l'unité près de λ pour $A_\lambda = 0{,}8$ u.a. : $2{,}8 < \lambda < 3{,}8$.

<u>Exercice 2</u> *[3 points]*

$$\begin{cases} \text{Repère orthonormé } (0\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}) \\ \text{Équation du plan P :} \quad 2x - z - 3 = 0 \\ \text{Point A } (1\ ;\ a\ ;\ a^2)\ , \quad \text{avec } a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1) Si $A \notin P$, alors ses coordonnées ne vérifient pas l'équation, or :

$2x - z - 3 =$
$2\times1 - a^2 - 3 =$
$2 - 3 - a^2 =$
$-1 - a^2$

Or si l'on avait : $2x - z - 3 = 0$, alors on aurait :
$-1 - a^2 = 0$
$a^2 = -1 < 0$ ce qui est impossible pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Donc $A\ (1\ ;\ a\ ;\ a^2)$, avec $a \in \mathbb{R}$, n'appartient pas au plan P.

2) D est la droite passant par A et orthogonale à P.
t est le paramètre réel de la représentation paramétrique de D.

2.a) $A \in D$

Soit $\vec{n}$ le vecteur normal à P, donc un vecteur directeur de D :

P : $2x + 0y - 1z - 3 = 0$ donc :

$$\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

J'en déduis que la représentation paramétrique de cette droite D passant par A est :

$$D : \begin{cases} x = x_A + t.x_{\vec{n}} \\ y = y_A + t.y_{\vec{n}} \\ z = z_A + t.z_{\vec{n}} \end{cases}$$

$$\mathbf{D : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = a \\ z = a^2 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}}$$

2.b) $M\ (x\ ;\ y\ ;\ z) = M\ (1 + 2t\ ;\ a\ ;\ a^2 - t)$ d'où :

$AM = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2}$
$AM = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - a)^2 + (z - a^2)^2}$
$AM = \sqrt{(2t)^2 + (0)^2 + (-t)^2}$
$\mathbf{AM = \sqrt{5}.|t|}$, **avec $t \in \mathbb{R}$.**

3) H $\in$ D et H $\in$ P , donc les coordonnées de H $(1 + 2t_H ; a ; a^2 - t_H)$, avec $t_H \in \mathbb{R}$, vérifient l'équation de P :

$2(1 + 2t_H) - (a^2 - t_H) - 3 = 0$

$2 + 4t_H - a^2 + t_H - 3 = 0$

$5t_H - a^2 - 1 = 0$

$$\mathbf{t_H = \frac{1 + a^2}{5}}$$

Si M = H, alors on a :

$$AH = \sqrt{5}.\left|\frac{1 + a^2}{5}\right| = \frac{|1 + a^2|}{\sqrt{5}} = \frac{1 + a^2}{\sqrt{5}}$$

or pour tout réel a : $a^2 \geqslant 0$

$1 + a^2 \geqslant 1 > 0$ donc : $|1 + a^2| = 1 + a^2$ pour tout réel a.

Donc : $AH = \frac{1 + a^2}{\sqrt{5}}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Or : $1 + a^2$ est minimal si a^2 est minimal, d'où :

$\frac{1}{\sqrt{5}}$ est la valeur minimale de AH pour a = 0.

On a alors : H (1 ; 0 ; 0).

<u>Exercice 3</u> *[5 points]*

Point M(z) , avec $z \in \mathbb{C}$.

(A)

A.1) **La proposition, correcte est la C.**

<u>justification</u> :

$P(z_P)$ tel que : $z_P = r.e^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi ; \pi]$.

$P \in B3$ donc : $\begin{cases} r \in [40 ; 60] \\ \theta \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

A.2)

A.2.a) $z = 70\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$ → $\begin{cases} 60 < 70 < 80 : \text{zone } 3 \\ -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{3} < -\frac{\pi}{4} : \text{zone G} \end{cases}$

M(z) est en G3.

A.2.b) $Z = -45\sqrt{3} + 45i$, donc :

- $r = \sqrt{45^2 \times 3 + 45^2} = 90$ → zone 5
- $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\Re(z)}{r} = \frac{-45\sqrt{3}}{90} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \\ \sin\theta = \frac{\Im(z)}{r} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$

D'après le cercle trigonométrique : $\theta = \frac{5\pi}{6}$ → zone D

Donc M(z) est en D5.

(B) • $P(z_P)$ tel que $z_P = 50\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ *(→ P est en zone B3)*

• $\begin{cases} \text{M suit la loi normale } N(50\ ;\ 5^2) \\ \text{T suit la loi normale } N\left(\frac{\pi}{3}\ ;\ \left(\frac{\pi}{12}\right)^2\right) \end{cases}$

M et T sont des variables aléatoires indépendantes : $(M \in I)$ est indépendant de $(T \in J)$.

• Arrondis des probabilités à 10^{-3} près

• n et p sont inconnues, mais l'énoncé indique que la loi normale $N(\mu\ ;\ \sigma^2)$ est applicable ici : on suppose donc que les conditions nécessaires à son application sont respectées : $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ \mu = np \geqslant 5 \\ n(1-p) \geqslant 5 \end{cases}$

B.1) Il est impossible par définition que le module d'un affixe soit négatif, donc on doit avoir en principe : $P(M < 0) = 0$

Si l'on calcule $P(M < 0)$, les lois de probabilité doivent aller dans ce sens :

► Les conditions d'application de la loi normale sont supposées vérifiées *(Cf. énoncé)*.

► Pour suivre une loi normale centrée réduite $N(0\ ;\ 1)$, on procède à un changement de variable aléatoire :

$$M \quad \rightarrow \quad X = \frac{M-\mu}{\sigma} = \frac{M-50}{5} = \frac{M}{5} - 10 \qquad \text{(Théorème de Moivre-Laplace)}$$

► Si $M < 0$, alors : $\frac{M}{5} < 0$

$$\frac{M}{5} - 10 < -10$$

► D'où :

$$\begin{aligned} P(M<0) &= P(X<-10) \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-10} e^{-\frac{t^2}{2}}.dt \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-100}^{-10} e^{-\frac{t^2}{2}}.dt \qquad \textit{(la fonction normale centrée réduite étant positive sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{aligned}$$

Or : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-100}^{-10} e^{-\frac{t^2}{2}}.dt \approx 8\times10^{-24} \approx 0$

Donc $P(M < 0) \approx 0$: les probabilités disent ici qu'il est quasiment impossible que M soit négatif, ce qui va dans le sens de la définition d'un module : réel toujours positif ou nul.

B.2) Je cherche $P(M \in]40\ ;\ 60[)$.

Soit X la variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0\ ;\ 1)$, telle que :

$$X = \frac{M-\mu}{\sigma} = \frac{M-50}{5} = \frac{M}{5} - 10 \qquad \text{(Théorème de Moivre-Laplace)}$$

Si : $40 < M < 60$, alors :

$$40 - 50 < M - \mu < 60 - 50$$

$$\frac{-10}{5} < \frac{M-\mu}{\sigma} < \frac{10}{5}$$

$-2 < X < 2$, donc :

$$P(M \in]40\ ;\ 60[) = P(X \in]-2\ ;\ 2[) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2}^{2} e^{-\frac{x^2}{2}}.dx$$

Je sais donc, dans le cadre de la loi normale centrée réduite N(0 ; 1), que cela correspond à la probabilité sur $]-2\sigma\ ;\ 2\sigma[$, soit *(calcul possible à la calculatrice)* :

$P(M \in]40\ ;\ 60[) \approx 0{,}955$ à 10^{-3} km = 1 m près, soit environ 95,5 % de chance que l'impact détecté entre 40 et 60 km soit effectivement dans cette zone *(ce qui est très fiable)***.**

B.3) $\begin{cases} P(M \in]40\ ;\ 60[) \approx 0{,}955 \\ P(T \in]\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{2}[) \approx 0{,}819 \end{cases}$

Sachant que : $\begin{cases} r \in]40\ ;\ 60[\\ \theta \in]\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{2}[\end{cases}$ sont les conditions pour que le point $P \in B3$

et sachant que $(M \in I)$ est indépendant de $(T \in J)$, j'en déduis que :

$P(P \in B3) = P(M \in]40\ ;\ 60[) \times P(T \in]\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{2}[)$

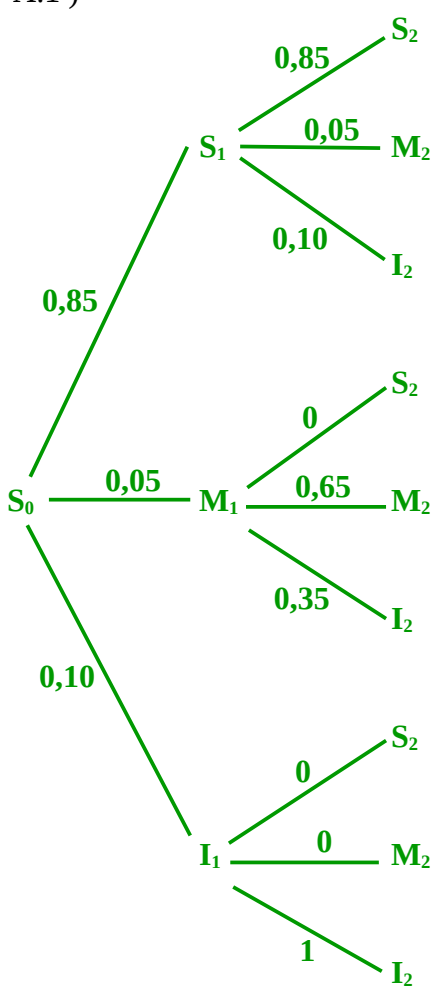
$P(P \in B3) \approx 0{,}955 \times 0{,}819$

$P(P \in B3) \approx 0{,}782$, soient environ 78,2 % de chances que l'impact détecté soit effectivement dans la zone B3 *(donc plus de 3 « chances » sur 4, ce qui est un peu moins fiable mais assez satisfaisant, vue la difficulté technique)***.**

<u>Exercice 4</u> *[5 points]* - ***Élèves <u>n'ayant pas</u> suivi l'enseignement de spécialité***

(A)

A.1)



$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1)\times P_{S_1}(S_2) = 0{,}85\times 0{,}85 =$ **0,7225**

$P(S_1 \cap M_2) = P(S_1)\times P_{S_1}(M_2) = 0{,}85\times 0{,}05 =$ **0,0425**

$P(S_1 \cap I_2) = P(S_1)\times P_{S_1}(I_2) = 0{,}85\times 0{,}10 =$ **0,085**

$P(M_1 \cap S_2) = P(M_1)\times P_{M_1}(S_2) = 0{,}85\times 0 =$ **0**

$P(M_1 \cap M_2) = P(M_1)\times P_{M_1}(M_2) = 0{,}05\times 0{,}65 =$ **0,0325**

$P(M_1 \cap I_2) = P(M_1)\times P_{M_1}(I_2) = 0{,}05\times 0{,}35 =$ **0,0175**

$P(I_1 \cap S_2) = P(I_1)\times P_{I_1}(S_2) = 0{,}10\times 0 =$ **0**

$P(I_1 \cap M_2) = P(I_1)\times P_{I_1}(M_2) = 0{,}10\times 0 =$ **0**

$P(I_1 \cap I_2) = P(I_1)\times P_{I_1}(I_2) = 0{,}10\times 1 =$ **0,1**

A.2) $P(I_2) = P(S_1 \cap I_2) + P(M_1 \cap I_2) + P(I_1 \cap I_2)$

$P(I_2) = P(S_1)\times P_{S_1}(I_2) + P(M_1)\times P_{M_1}(I_2) + P(I_1)\times P_{I_1}(I_2)$

$P(I_2) = 0{,}85\times 0{,}10 + 0{,}05\times 0{,}35 + 0{,}10\times 1$

$P(I_2) = 0{,}2025$

A.3) A 10^{-3} près, je cherche :

$$P_{I_2}(M_1) = \frac{P(I_2 \cap M_1)}{P(I_2)} = \frac{P(M_1)\times P_{M_1}(I_2)}{P(I_2)} = \frac{0{,}05\times 0{,}35}{0{,}2025}$$

$P_{I_2}(M_1) \approx 0{,}086$ à 10^{-3} près.

Immunisé en semaine 2, la probabilité d'avoir été malade en semaine 1 est donc d'environ 8,6 %.

(B) $\begin{cases} u_n = P(S_n) \\ v_n = P(M_n) \\ w_n = P(I_n) \end{cases}$

B.1) En semaine n, l'univers des événements est $\Omega = \{S_n ; M_n ; I_n\}$, d'où :

$P(S_n) + P(M_n) + P(I_n) = 1$

Finalement, on trouve bien pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n + v_n + w_n = 1$.

B.2) $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 0{,}65.v_n + 0{,}05.u_n \end{cases}$ *(admis)*

B.2.a) $v_1 = 0{,}65\times v_0 + 0{,}05.u_0$

donc dans la cellule C3 (calcul de v_1), la formule saisie est :

= 0,65×C2+0,05×B2

B.2.b) **Le pic épidémique a lieu en semaine N = 4 :**

il y a 8,59 % de probabilités de tomber malade cette semaine-là.

B.3)

B.3.a) Je sais que : $P_{S_n}(S_{n+1}) = 0{,}85$ *(Cf. A.1))* d'où :

$$\frac{P(S_{n+1} \cap S_n)}{P(S_n)} = 0{,}85 \quad \text{or :}$$

$P(S_{n+1}) = P(S_{n+1} \cap S_n) + P(S_{n+1} \cap M_n) + P(S_{n+1} \cap I_n)$

$P(S_{n+1}) = P(S_{n+1} \cap S_n) + 0 + 0$

$P(S_{n+1}) = P(S_{n+1} \cap S_n)$ donc j'en déduis que :

$$\frac{P(S_{n+1})}{P(S_n)} = 0{,}85$$

$P(S_{n+1}) = 0{,}85\times P(S_n)$

Je trouve donc que : $u_{n+1} = 0{,}85\times u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(u_n) est donc par définition une suite géométrique de raison q = 0,85.

J'en déduis que :

$u_n = u_0 \times q^n = 1 \times 0{,}85^n$

Finalement : $u_n = 0{,}85^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

B.3.b) ► *Hypothèse de récurrence au rang n :*

$$v_n = \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n)$$

► Vérification au rang n = 0 :

$v_0 = \frac{1}{4}(1 - 1) = 0$, comme admis en B.2).

Hypothèse vérifiée au rang n= 0.

► *Hypothèse supposée vraie au rang n.*

► Vérification au rang n+1 :

$v_{n+1} = 0{,}65.v_n + 0{,}05.u_n$ *(admis en B.2))*

$$v_{n+1} = 0{,}65 \times \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n) + 0{,}05 \times 0{,}85^n$$

$$v_{n+1} = 0{,}65 \times \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n) + 0{,}05 \times 0{,}85^n$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4} \times [0{,}65 \times 0{,}85^n + 4 \times 0{,}05 \times 0{,}85^n - 0{,}65^{n+1}]$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4} \times [(0{,}65 + 0{,}20) \times 0{,}85^n - 0{,}65^{n+1}]$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4} \times [0{,}85^{n+1} - 0{,}65^{n+1}]$$

Hypothèse vérifiée au rang n+1.

► **On a donc bien :** $\mathbf{v_n = \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$

B.3.c) Je déduis des questions B.1) , B.3.a) et B.3.b) que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_n = 0{,}85^n \\ v_n = \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n) \\ w_n = 1 - u_n - v_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d'où :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}85^n = 0$ car : $0 < 0{,}85 < 1$

  donc : $\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} P(S_n) = 0}$
- De même, et pour des raisons de linéarité des limites de fonctions :

  $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{4}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}85^n - \lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}65^n\right) = \frac{1}{4}(0 - 0)$

  donc : $\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} P(M_n) = 0}$
- J'en déduis que :

  $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1 - \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$

  donc : $\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} P(I_n) = 0}$

A long terme, ce modèle prévoit donc que tout le monde sera immunisé.