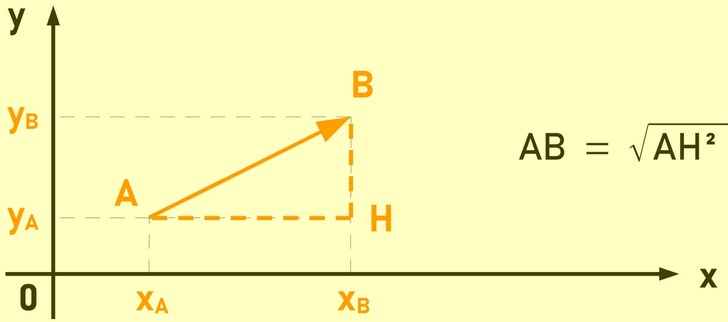
# EQUATIONS DE DROITES - Géométrie analytique dans le plan (2D)

## 1 - Rappels :

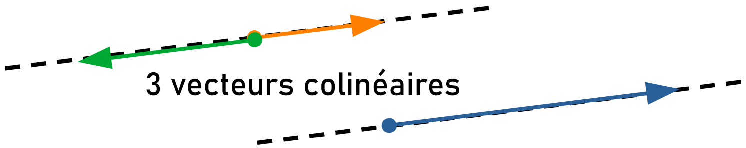
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{AB}} \\ y_{\overrightarrow{AB}} \end{pmatrix}$ reliant les points $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ a pour **coordonnées :** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- La **norme** de $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{AB}} \\ y_{\overrightarrow{AB}} \end{pmatrix}$ est sa longueur : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB$.

*<u>Démonstration</u> :*
*Il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore dans (ABH) rectangle en H :*

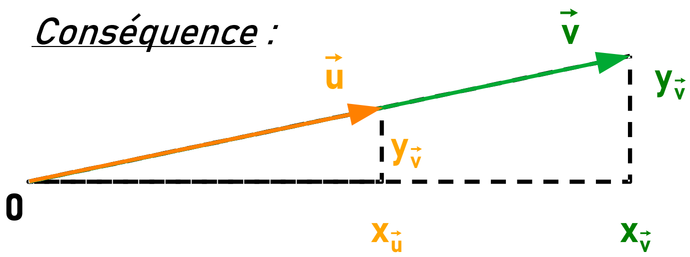



$$AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ **et** $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ **sont colinéaires s'ils sont parallèles**, c'est-à-dire qu'ils ont :
  - la **même direction** (parallèles),
  - mais **pas forcément la même longueur** (coordonnées proportionnelles, coefficient de proportionnalité $k \neq 1$),
  - ni **pas forcément le même sens** (si $k < 0$)
  - et n'ont **pas forcément la même origine**.




*<u>Conséquence</u> :*




Les deux triangles sont proportionnels : $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} = k.x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{v}} = k.y_{\vec{u}} \end{pmatrix} = k.\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$

- Le **déterminant** de 2 vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ est : $x_{\vec{u}}.y_{\vec{v}} - y_{\vec{u}}.x_{\vec{v}}$.
  - NB : **Si le déterminant : $x_{\vec{u}}.y_{\vec{v}} - y_{\vec{u}}.x_{\vec{v}} = 0$**, alors **$\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ sont colinéaires**.
  - *Démonstration :*

    Si : $x_{\vec{u}}.y_{\vec{v}} - y_{\vec{u}}.x_{\vec{v}} = 0$, alors : $x_{\vec{u}}.y_{\vec{v}} = x_{\vec{v}}.y_{\vec{u}}$, donc : $\frac{y_{\vec{v}}}{y_{\vec{u}}} = \frac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}} = \text{constante} = k$, d'où :

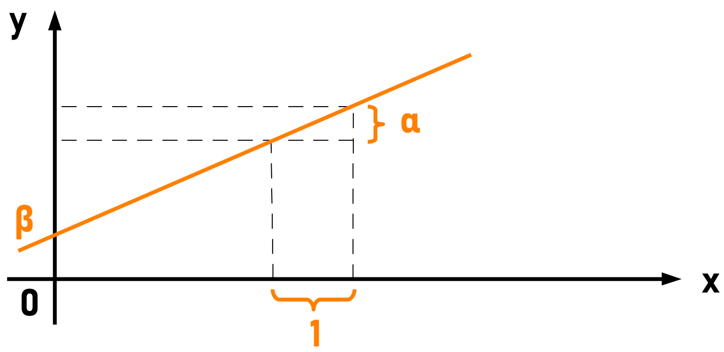
$$\begin{cases} \frac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}} = k \quad \text{donc :} \quad x_{\vec{v}} = k.x_{\vec{u}} \\ \frac{y_{\vec{v}}}{y_{\vec{u}}} = k \quad \text{donc :} \quad y_{\vec{v}} = k.y_{\vec{u}} \end{cases}$$

    Donc si le déterminant de $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ est nul, ces deux vecteurs sont bien colinéaires.

- **Equation d'une droite (fonction affine) :**

  **$y = \alpha.x + \beta$**

$$\begin{cases} \alpha : \text{coefficient directeur ou « pente »} \\ \beta : \text{ordonnée à l'origine} \end{cases}$$




NB : **Si β = 0, on parle de fonction linéaire.**
La droite représente alors une situation de **proportionnalité entre x et y**.

## 2 – Equations de droites et vecteurs :

- **L'équation d'une droite peut aussi s'écrire : $a.x + b.y + c = 0$.**

*Démonstration :*

Si $a.x + b.y + c = 0$, alors :

$b.y = -a.x - c$

$y = -\frac{a}{b}.x - \frac{c}{b}$

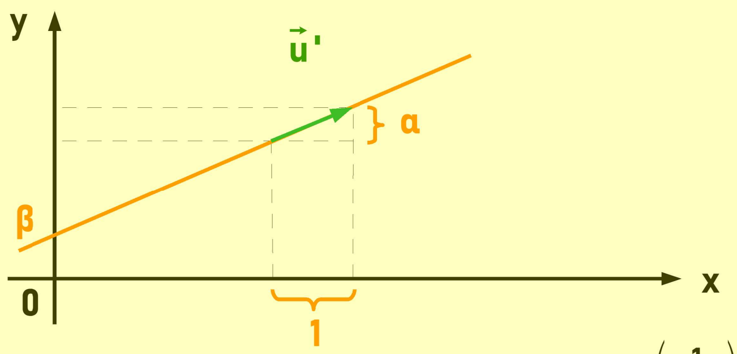
$y = \alpha.x + \beta$ avec : $\alpha = -\frac{a}{b}$ et $\beta = -\frac{c}{b}$

Et réciproquement : $\alpha.x - y + \beta = 0$. En multipliant par une constante k les 2 membres : $k\alpha.x - k.y + k.\beta = 0$ CQFD !

- **L'intérêt de cette équation** est de permettre d'en **déduire directement les coordonnées :**
  - **du vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$** à cette droite (« normal » signifie « orthogonal »),
  - **du vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$** colinéaire à cette droite.
  - Inversement, **connaître l'un de ces vecteurs permet d'en déduire l'équation de la droite**.

*Démonstration :*

Si $a.x + b.y + c = 0$, on a montré que : $y = \alpha.x + \beta$ avec : $\alpha = -\frac{a}{b}$ et $\beta = -\frac{c}{b}$



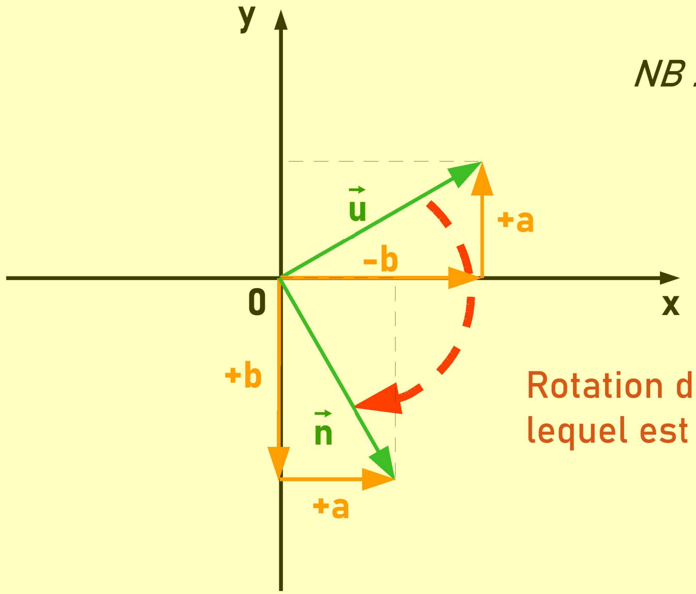

Donc un vecteur directeur colinéaire de cette droite peut être : $\vec{u}'\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \vec{u}'\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix}$, ou bien : $\vec{u} = -b.\vec{u}' = \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

On peut alors chercher un vecteur $\vec{n}$ normal à cette droite, donc perpendiculaire à $\vec{u}$ :

Un peu compliqué…

Si tu ne comprends pas cette démonstration, ce n'est pas grave.

*NB: une démonstration plus facile existe avec les produits scalaires (produits de vecteurs).*




*NB : a et b sont de valeurs relatives…*

Rotation de 90° du rectangle dans lequel est inscrit le vecteur

Le vecteur normal peut être alors : $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

- *<u>Vérification</u> :*
  Prenons deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ fixé et $M(x\,;\,y)$ mobile tels que $A \in (d)$ et $M \in (d)$.
  Nous cherchons l'équation de cette droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

  Puisque A et M sont sur la droite, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, donc leur déterminant doit être nul :

$$x_{\overrightarrow{AM}}.y_{\vec{u}} - y_{\overrightarrow{AM}}.x_{\vec{u}} = 0$$
$$(x - x_A).a - (y - y_A).(-b) = 0$$
$$(x - x_A).a + (y - y_A).b = 0$$
$$a.x - a.x_A + b.y - b.y_A = 0$$
$$a.x + b.y - a.x_A - b.y_A = 0$$

On trouve bien pour équation de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ passant par $A(x_A\,;\,y_A)$ :

(d) : $a.x + b.y + c = 0$ avec : $c = -a.x_A - b.y_A$.

## 3 – Applications (exemples) :

- **Ex 1 :** L'équation de la droite (d) de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ est : $3.x - 2.y + c = 0$

car : $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ donc : $a = 3$ et $b = -2$.

- **Ex 2 :** L'équation de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ est : $-2.x - 3.y + c = 0$

car : $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ donc : $a = -2$ et $-b = 3$ d'où $b = -3$.

- **Ex 3 :** Le point $A(4\,;\,2)$ est tel que $A \in (d)$ d'équation $7.x + 5.y + c = 0$.

J'en déduis qu'au point A, $x = 4$ et $y = 2$, d'où : $7\times4 + 5\times2 + c = 0$, donc :

$28 + 10 + c = 0$

$38 + c = 0$

$c = -38$ *(Remarque : on a démontré plus haut que $c = -a.x_A - b.y_A = -7\times4 - 5\times2 = -28 - 10 = -38$)*

Donc la droite (d) passant par $A(4\,;\,2)$ a pour équation : $7.x + 5.y - 38 = 0$.

- **Ex 4 :** La droite (d) d'équation : $-x + 6.y - 17 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$ et vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}$.

## 4 - Résumé :

$\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ est :

le **vecteur directeur** de ($d_1$) : 5.x + 3.y + 15 = 0

le **vecteur directeur** de ($d_2$) : 5.x + 3.y – 28,5 = 0

le **vecteur normal** de ($d_3$) : –3.x + 5.y + 7 = 0

le **vecteur normal** de ($d_4$) : –3.x + 5.y – 0,7 = 0

etc…

$\vec{v}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ est :

**colinéaire** au **vecteur normal** des droites d'équation :

8.x + 2.y + c = 0 ; –12.x – 3.y + c = 0 etc…

et **colinéaire** au **vecteur directeur** des droites d'équation :

2.x – 8.y + c = 0 ; –x + 4.y + c = 0 etc…

A(1 ; 3) et B(3 ; 4) forment

le **vecteur directeur** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

de la droite (AB).

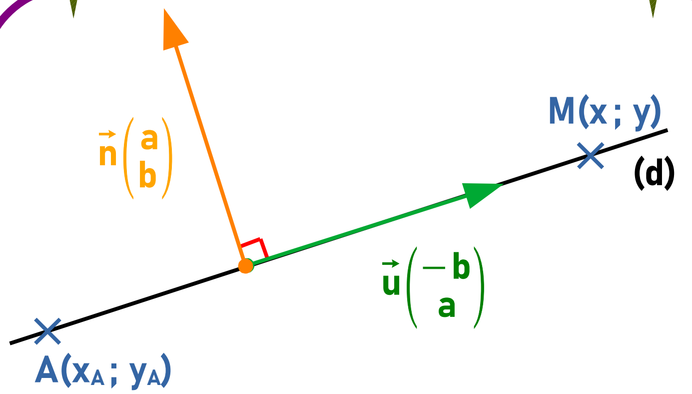
Le point **M situé en y = 2**

et appartenant à (d) :

3.x – 15.y – 12 = 0

est M(18 ; 2) car :

3.x – 15×2 – 12 = 0.




(d) : **a.x + b.y + c = 0**

(d) : –6.x – y + c = 0 a pour

**vecteur normal** : $\vec{n}\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}$

et pour

**vecteur directeur** : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$.

Or A(2 ; 5) ∈ (d) donc :

–6×2 – 5 + c = 0

c = 17 d'où l'équation de (d) :

–6.x – y + 17 = 0.