Chapitre

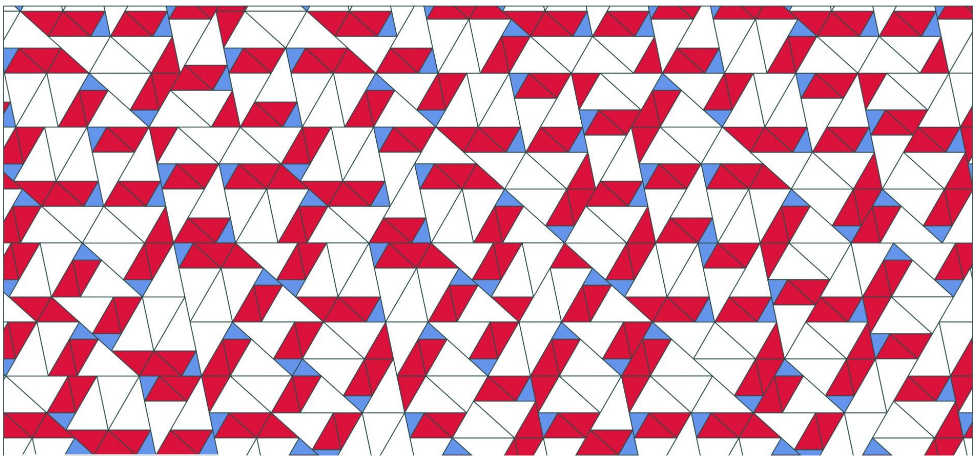
5

UAA1 : Figures isométriques et figures semblables

Cas d'isométries des triangles

Un triangle est isométrique à un autre triangle lorsqu'il existe une isométrie (une translation, une rotation, une symétrie) par laquelle l'un est l'image de l'autre. Cela correspond à l'idée de triangles superposables.

Ce chapitre permet de découvrir les cas d'isométrie des triangles par le biais de constructions raisonnées. Certains énoncés qui figurent dans les exercices peuvent être démontrés de plusieurs façons, notamment par les invariants des isométries ; mais, dans le cadre de ce chapitre, les cas d'isométrie des triangles seront utilisés.



Programme du cours

Compétences à développer

1. Mobiliser des propriétés de triangles isométriques ;
2. Démontrer des propriétés.

Processus

1. **Connaitre**
   (a) Reconnaitre des triangles isométriques et justifier à l'aide du cas d'isométrie adéquat.
2. **Transférer**
   (a) Démontrer que deux triangles sont isométriques pour en dégager une propriété ;
   (b) Résoudre un problème faisant appel aux triangles isométriques.

Ressources

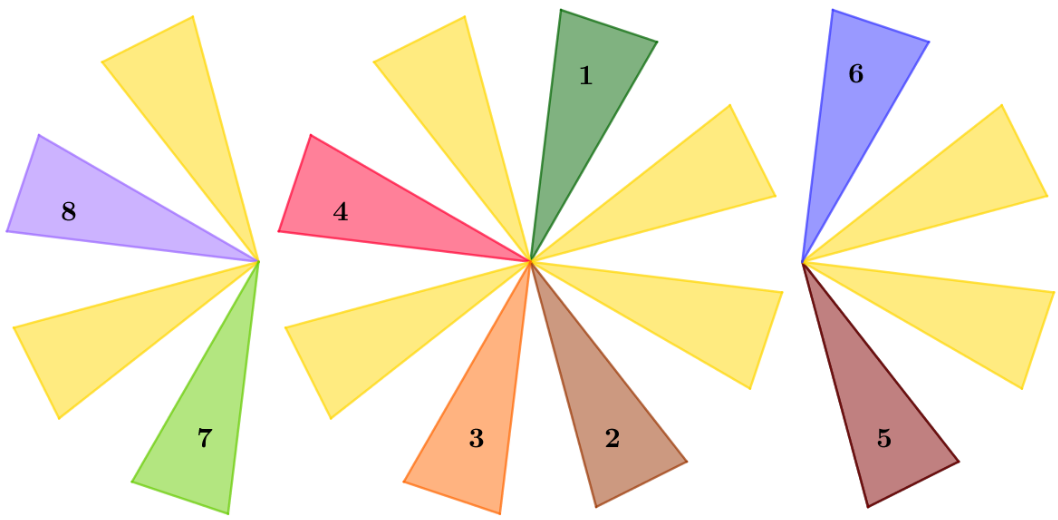
1. Cas d'isométrie des triangles.

1

Explorations

1.1 Notions d'isométrie

1.1.1 La valse des triangles



Un concepteur de logos publicitaires vante la facilité de reproduction de son logo pour la vente de parasols. Il affirme qu'avec le seul triangle **1** et un bon logiciel de dessin qui fait subir des transformations du plan à des figures, il peut tracer son logo.

(1) Quel type de transformations du plan utilise-t-il ?

. . . .

. . . .

(2) Quelle est (sont) la (les) transformation(s) du plan qui envoi(en)t le triangle **1** sur :

(a) le triangle **2** : ....

(b) le triangle **3** : ....

(c) le triangle **4** : ....

(d) le triangle **5** : ....

(e) le triangle **6** : ....

(f) le triangle **7** : ....

(g) le triangle **8** : ....

(3) Quels invariants des isométries sont observés grâce au logo ci-dessus ?

- ....
- ....
- ....
- ....

(4) Dans chacune des quatre figures ci-dessous, les triangles sont-ils isométriques ? Si oui, repérer les côtés qui sont images l'un de l'autre par une isométrie. Ils sont appelés des côtés homologues. Nommer ensuite les sommets homologues dans l'ordre.

Figure 1

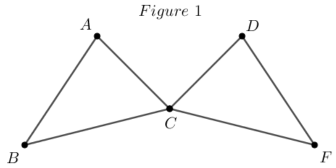


Figure 2

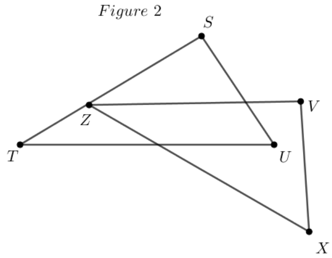


Figure 3

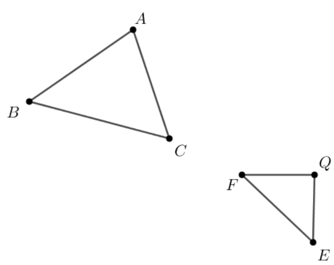
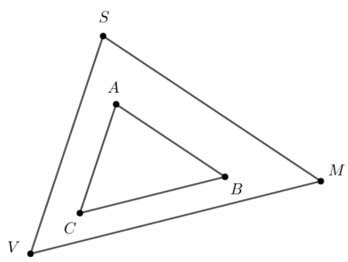


Figure 4



(5) Si les triangles ABC et MNP sont images l'un de l'autre par une isométrie, quelle conclusion peut être formulée concernant leurs angles homologues et leurs côtés homologues ?

. . . .

. . . .

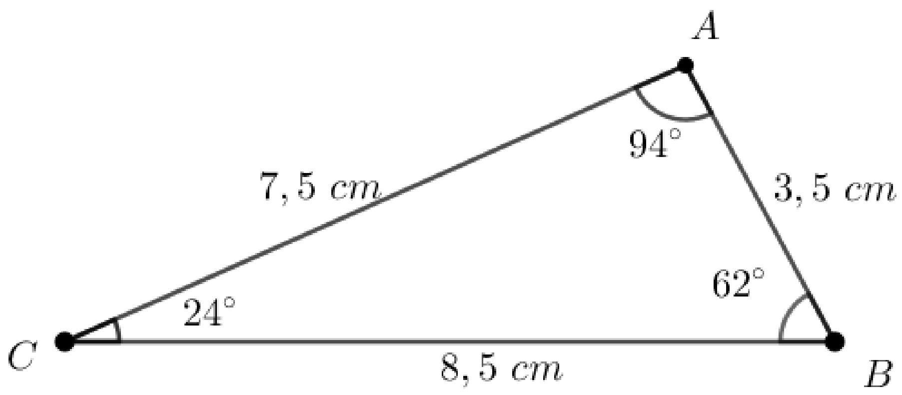
. . . .

. . . .

Synthèses
2.1.1

1.1.2 Cas d'isométrie de triangles

(1) Tom voudrait reproduire le logo de la page 5.3. Pour ce faire, il choisit six données numériques pour le triangle ABC ci-dessous.



Il construit ensuite un triangle DEF en utilisant uniquement trois de ces données, dans les différentes cas suivants.

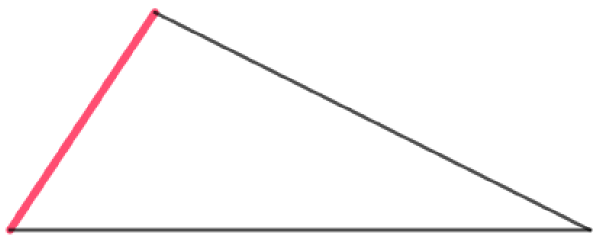
	$\|DE\|$	$\|EF\|$	$\|DF\|$	$\|\widehat{D}\|$	$\|\widehat{E}\|$	$\|\widehat{F}\|$
Cas 1	35 mm			94°	62°	
Cas 2	35 mm		75 mm	94°		
Cas 3	35 mm	85 mm	75 mm			
Cas 4				94°	62°	24°
Cas 5	35 mm		75 mm			24°
Cas 6		85 mm		94°	62°	

Relever les numéros des cas pour lesquels le triangle DEF construit par Tom sera à coup sûr une reproduction exacte du triangle ABC.

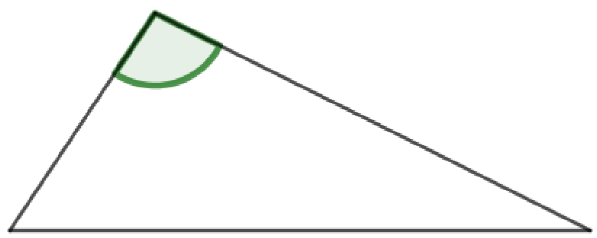
Suggestion : Construire le (ou les) triangle(s) dans chacun des cas sur une feuille séparée.

(2) Voici deux triangles dans lesquels ont été tracé un élément dont la mesure est connue. Pour chaque situation, colorier les deux autres éléments qu'il faut connaître pour construire un triangle isométrique à celui-ci. Il existe plusieurs possibilités pour chaque situation.

$Sitation\ 1$



$Sitation\ 2$



(3) Énoncer les critères qui permettent de construire un triangle isométrique à un triangle donné. Ceux-ci sont appelés "*cas d'isométrie*".

(a) ....

....

(b) ....

....

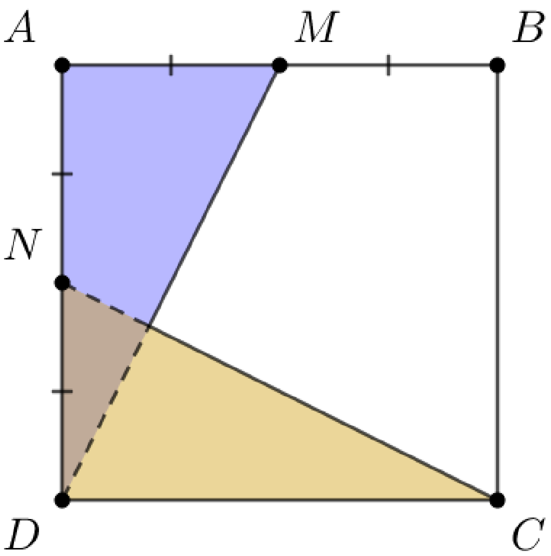
(c) ....

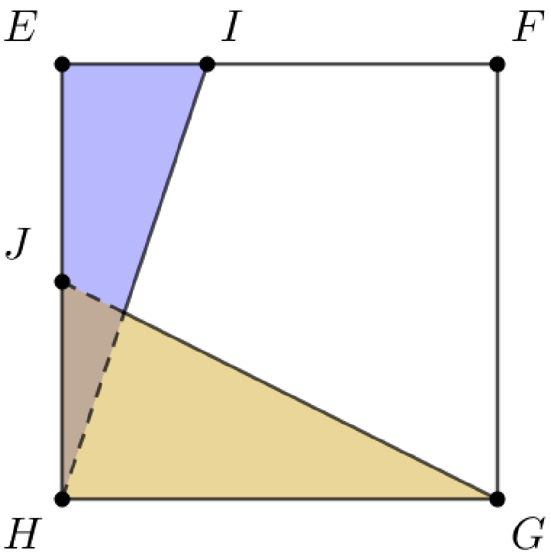
....

(4) Dans les carrés ci-dessous, les triangles colorés sont-ils isométriques ? Si oui, justifier en utilisant un cas d'isométrie.

Synthèses
2.1.2

Exercices
3.1.1
3.1.2
3.1.3
3.1.4
3.2.1
3.2.2
3.3.1
3.3.2
3.3.3





2

Synthèses

2.1 Triangles isométriques

2.1.1 Notion d'isométrie

2.1.1.1 Que signifie isométrie ?

Définition 2.1 (Isométrie)**.** Une isométrie est ....

....

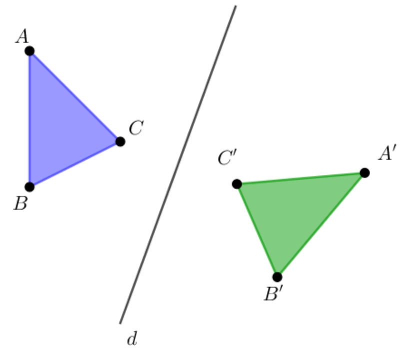
....

Définition 2.2 (Deux figures isométriques)**.** Deux figures sont isométriques ....

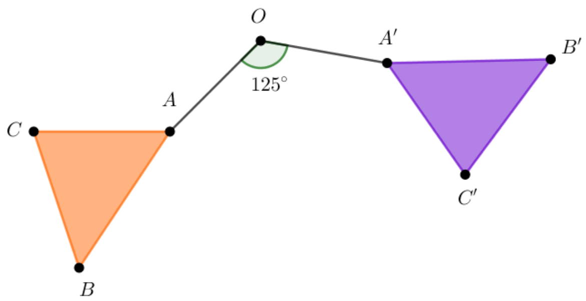
....

Exemple 2.1 (Deux cas de de deux figures isométriques)**.**

(1) Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques, car ils sont images l'un de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe d.



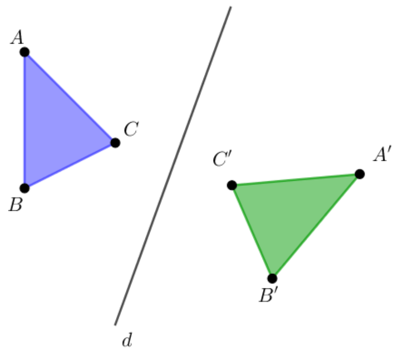
(2) Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques, car ils sont images l'un de l'autre par la rotation de centre O et d'amplitude $125°$.



2.1.1.2 Quelques mots de vocabulaire

Définition 2.3 (Homologues)**.** Le terme "*homologue*" signifie ....
....

Exemple 2.2 (Sommets, côtés et angles homologues)**.**



(1) Le sommet . . . . . . est l'image du sommet . . . . . . par la symétrie orthogonale d'axe d ; donc . . . . . . et . . . . . . sont . . . .

(2) Le côté . . . . . . est l'image du côté . . . . . . par la symétrie orthogonale d'axe d ; donc . . . . . . et . . . . . . sont . . . .

(3) L'angle . . . . . . est l'image de l'angle . . . . . . par la symétrie orthogonale d'axe d ; donc . . . . . . et . . . . . . sont . . . .

2.1.1.3 Quelles sont les propriétés des triangles isométriques ?

Propriété 2.1 (Deux triangles isométriques)**.** *Si deux triangles sont isométriques, alors* . . . .

Remarque (Notation de deux triangles isométriques). Si les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques, alors ils sont notés . . . .
De plus, si $\triangle ABC$ *iso* $\triangle A'B'C'$, alors

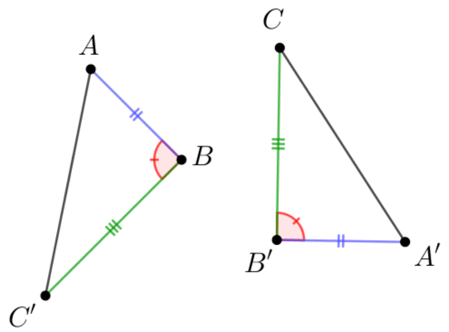
$$\begin{cases} \ldots\ldots = \ldots\ldots & | & \ldots\ldots = \ldots\ldots \\ \ldots\ldots = \ldots\ldots & | & \ldots\ldots = \ldots\ldots \\ \ldots\ldots = \ldots\ldots & | & \ldots\ldots = \ldots\ldots \end{cases}$$

2.1.2 Cas d'isométrie de triangles

2.1.2.1 Comment savoir si un ensemble de mesures détermine ou non un triangle ? Quels sont les cas d'isométrie des triangles ?

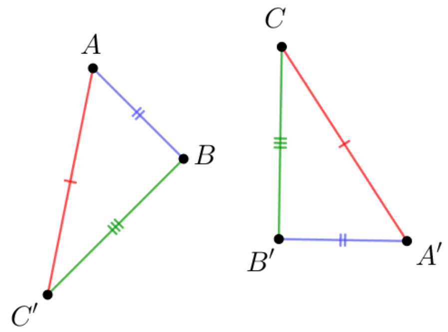
Propriété 2.2 (Cas d'isométrie CAC)**.** *Deux triangles sont isométriques* . . . .
. . . .
. . . .

Exemple 2.3 (Cas d'isométrie CAC)**.**



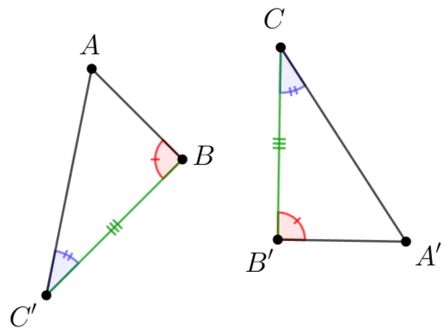
Propriété 2.3 (Cas d'isométrie CCC)**.** *Deux triangles sont isométriques* . . . .
. . . .
. . . .

Exemple 2.4 (Cas d'isométrie CCC)**.**



Propriété 2.4 (Cas d'isométrie ACA)**.** *Deux triangles sont isométriques* ....
....
....

Exemple 2.5 (Cas d'isométrie ACA)**.**



2.1.2.2 Quelle est l'importance des cas d'isométrie des triangles ?

La connaissance des six données (trois amplitudes d'angles et trois longueurs de côtés) n'est pas obligatoire pour construire un triangle, seuls trois renseignement suffisent. Ces conditions suffisantes pour déterminer un triangle s'appellent des **cas d'isométrie**. Ils permettent de :

(1) construire un triangle isométrique à un triangle donné en utilisant trois renseignements ;

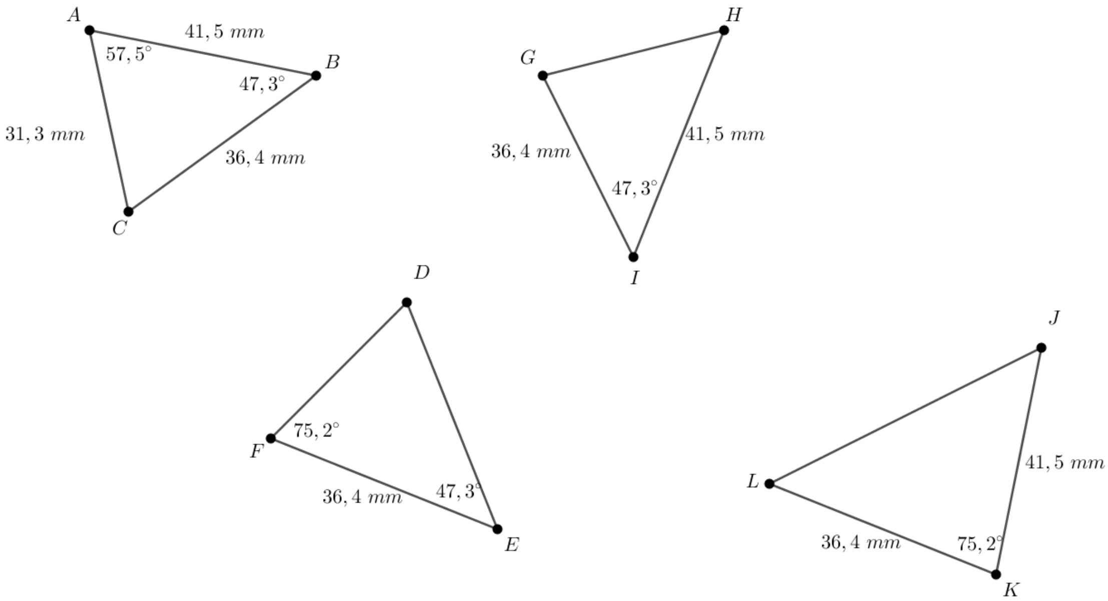
(2) repérer si deux triangles sont isométriques en vérifiant si trois éléments homologues sont isométriques.

3 Exercices

3.1 Connaître

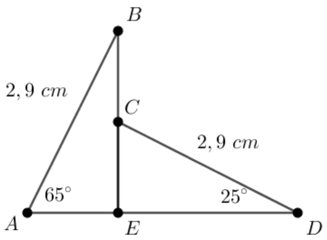
3.1.1 D'après les mesures données

Parmi les triangles ci-dessous, trois d'entre eux sont isométriques. Lesquels ? Justifier.

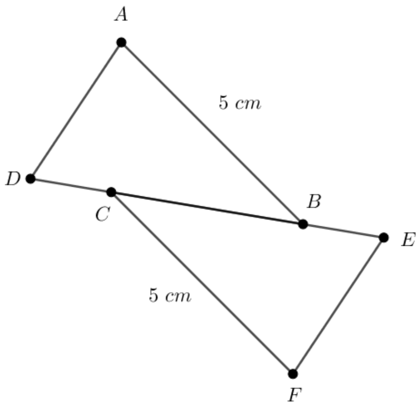


3.1.2 Choisir le cas d'isométrie

(1) Les droites AD et BE sont perpendiculaires. Quel est le cas d'isométrie qui permet d'établir que les triangles ABE et CDE sont isométriques ?



(2) Les droites AB et CF sont parallèles entre elles. De même, les droites AD et EF sont parallèles entre elles. Quel est le cas d'isométrie qui permet d'établir que les triangles ABD et FCE sont isométriques ?



3.1.3 Seulement avec des données

Avec les données ci-dessous, est-il possible de construire un triangle isométrique au triangle ABC ? Justifier, sans construire le triangle, en énonçant le cas d'isométrie utilisé.

(1) $|AB| = 5$ cm, $|\widehat{B}| = 60°$ et $|AC| = 11$ cm

. . . .

. . . .

(2) $|\widehat{A}| = 60°$, $|\widehat{B}| = 50°$ et $|\widehat{C}| = 40°$

. . . .

. . . .

(3) $|AB| = 5$ cm, $|BC| = 3$ cm et $|AC| = 7$ cm

. . . .

. . . .

(4) $|\widehat{A}| = 60°$, $|\widehat{B}| = 30°$ et $|BC| = 11$ cm

. . . .

. . . .

(5) $|AB| = 3$ cm, $|\widehat{B}| = 42°$ et $|BC| = 11$ cm

. . . .

. . . .

3.1.4 Ils sont isocèles, ont même base et même périmètre

Deux triangles isocèles ont le même périmètre : 17 cm, et la même base : 5 cm. Montrer que ces deux triangles sont isométriques.

3.2 Appliquer

3.2.1 Prolonger une médiane

Dans un triangle ABC, la médiane AM est prolongée d'une longueur telle que $|MD| = |AM|$. Les points D, B et C sont reliés. Trouver les triangles isométriques dans cette figure et justifier.

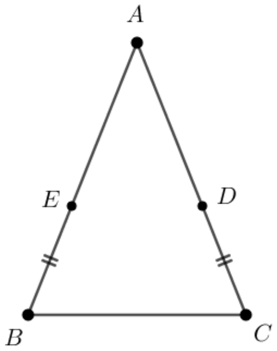
3.2.2 Prolonger une hauteur

Dans un triangle ABC, la hauteur AH est prolongée d'une longueur telle que $|HD| = |AH|$. Les points D, B et C sont reliés. Trouver les triangles isométriques dans cette figure et justifier.

3.3 Transférer

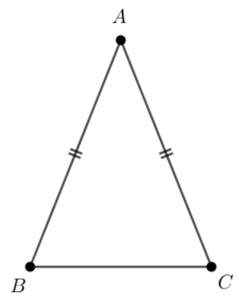
3.3.1 Caractériser un triangle

Démontrer que $|AB| = |AC|$ si $|EC| = |BD|$ (Hypothèse, Thèse et Démonstration).



3.3.2 Caractériser la longueur des côtés

Dans le triangle ABC isocèle en A, on prolonge le côté $[BA]$ d'une longueur $|AF|$ et le côté $[CA]$ d'une longueur $|AD|$, telle que $|AD| = |AF|$. Démontrer que $|BD| = |FC|$.



3.3.3 Dans un rectangle

Dans le rectangle $ABCD$, on note M le milieu de $[DC]$. Démontrer que le triangle AMB est isocèle en M.