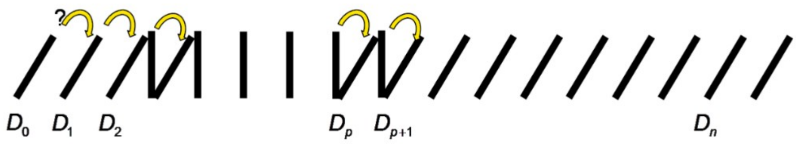
3) Le raisonnement par récurrence

A. En quoi consiste le raisonnement par récurrence ?

Pour expliquer son principe, on peut prendre l'image d'une suite infinie de dominos :



Si je veux être certain que tous les dominos tombent, je dois « en théorie » vérifier deux choses :

1° Que le premier domino D_0 tombe.
Cette première condition s'appelle : **l'initialisation**
Problème : rien ne garantit qu'alors le domino suivant D_1 tombe aussi. Il faut donc que je vérifie une deuxième chose.

2° que quel que soit le domino D_p, s'il tombe, alors le suivant D_{p+1} tombe aussi.
Cette deuxième condition s'appelle : **l'hérédité.**

Ainsi, comme d'après 1° D_0 tombe, alors d'après 2°, D_1 tombe.
Comme D_1 tombe, d'après 2° D_2 tombe. Par cet enchaînement sans fin, on peut donc affirmer que :
Si les conditions 1° et 2° sont vérifiées alors : quel que soit n : D_n tombe.

B. L'histoire du raisonnement par récurrence

Historiquement, le raisonnement par récurrence a eu du mal à être formalisé comme on le connaît : il a longtemps été utilisé intuitivement sans le nommer. Schématiquement, on peut distinguer trois grandes périodes de l'histoire pour l'utilisation du raisonnement par récurrence :

- **Les précurseurs (avant le XVIIème siècle)**

On fait souvent remonter la récurrence à **Euclide**, ce qui est à la fois **vrai et faux**. On peut y voir un début de récurrence dans la proposition 20 des Éléments où est prouvée l'existence arbitrairement grande de nombres premiers. Cependant, il y a juste une **esquisse** de récurrence, mais elle n'est pas explicitée.

Il existe d'autres exemples assez nombreux, européens ou non (arabes notamment), d'utilisation implicite de la récurrence avant le XVII[e] siècle. On peut citer par exemple **Fibonacci**, vers 1200, qui se sert du raisonnement par récurrence (sans le dire, bien sûr), comme en témoigne sa fameuse suite.

- **Les pères fondateurs : Pascal et Fermat (au XVIIème siècle)**

Il semble bien cependant que **Pascal, dans son *Traité du triangle arithmétique* de 1654,** soit **le premier à avoir énoncé nettement ce principe et à en avoir reconnu la puissance et la généralité**.

Il convient également de citer **Fermat**, qui est à l'origine du principe de la **descente infinie** et qui peut se formuler ainsi : « toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est une suite finie. »


Pierre de Fermat


Blaise Pascal

- **Les successeurs**

Si cette méthode est née en 1654, elle a eu beaucoup de mal à s'imposer auprès des mathématiciens. Par exemple, en 1686, lorsque **Bernoulli** montre par récurrence la formule $1 + 2 + 3 + \ldots + a = \dfrac{a^2+a}{2}$, il se croit obligé de décrire en

détail le mécanisme du raisonnement par récurrence. Cinquante ans plus tard, en 1735, quand le jeune **Euler** établit par récurrence le “petit théorème de Fermat”, lui aussi entre dans des détails qui montrent bien que ce mode de raisonnement reste inhabituel.
C’est au long du XIXe siècle que la communauté mathématique en viendra à considérer le raisonnement par récurrence d’abord comme un outil indispensable, puis comme la base même de l’édifice des nombres.

C. Applications

Méthode
On donne un nom, par exemple P(n), à la propriété (c’est-à-dire la formule) que l’on veut démontrer. Ensuite, pour montrer que la propriété P(n) est vraie pour tout $n \geq k$ avec n et k des entiers naturels (0, 1, 2, …), on procède en trois étapes :

Étape 1 : Initialisation
On montre que la propriété P(k) est vraie, c’est-à-dire que P(k) est vraie pour $n = k$

Étape 2 : Hérédité
On suppose que la propriété P(n) est vraie et on montre que la propriété P(n+1) l’est encore

Étape 3 : conclusion
On rédige alors : « Comme P(k) est vraie et qu’il y a hérédité, P(n) est vraie pour tout $n \geq k$ »

Exemple : Démontrer par récurrence la propriété : pour $n \geq 1$, $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Soit P(n) la propriété $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Étape 1 : initialisation

P(1) est vraie car pour $n = 1$ on a $1=\frac{1(1+1)}{2}$

Étape 2 : Hérédité

Supposons P(n) vraie, c’est-à-dire que $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ et montrons que P(n+1) l’est encore, c’est-à-dire que l’on a $1+2+3+\cdots+n+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

On a $1+2+3+\cdots+n+n+1=\frac{n(n+1)}{2}$+n+1   car P($n$) est vraie

Et donc $1+2+3+\cdots+n+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

On a donc bien hérédité.

Étape 3 : Conclusion

Comme P(1) est vraie et qu’il y a hérédité, P(n) est vraie pour tout $n \geq 1$

et donc : $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Sources :

https://www.educastream.com/fr/raisonnement-recurrence-terminale-s
https://www.mathemathieu.fr/component/attachments/download/1572
https://www.youtube.com/watch?v=b_pWPHfGD6k
https://www.editions-ellipses.fr/PDF/9782340015456_extrait.pdf

réalisé par Louise B., 3ème G