Chapitre 3 : Nombres en écriture fractionnaire

I Égalité de quotients

1) transformer, simplifier une écriture fractionnaire :

Règle : Si on multiplie ou si on divise le numérateur et le dénominateur d'un quotient par un même nombre non nul alors on obtient un quotient égal.

Pour tous nombres a, b et k non nuls $\dfrac{a \times k}{b \times k} = \dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{a \div k}{b \div k} = \dfrac{a}{b}$

Exemple 1 : Simplifier le quotient $\dfrac{42}{-140}$

- on détermine le signe du quotient : $\dfrac{42}{-140} = -\dfrac{42}{140}$
- on détermine les facteurs communs à 42 et 140 $-\dfrac{42}{140} = -\dfrac{3 \times \cancel{2} \times \cancel{7}}{10 \times \cancel{7} \times \cancel{2}}$
- on simplifie le quotient : $\dfrac{42}{-140} = -\dfrac{3}{10}$

Exemple 2 : Déterminer le nombre manquant dans l'égalité $\frac{-1,2}{6} = \frac{\dots}{18}$

- Pour passer de 6 à 18 on a multiplié par 3 ; ainsi pour trouver le nombre manquant on va multiplier $-1,2$ par 3 :

$$\frac{-1,2 \times 3}{6 \times 3} = \frac{-3,6}{18}$$

2) Réduction de quotients au même dénominateur :

Exemple 1 : Réduire les quotients $\frac{2}{9}$ et $\frac{5}{12}$ au même dénominateur

On cherche le plus petit commun multiple non nul, aux dénominateurs :

on dresse la liste des multiples de 9 : 9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; ...

multiples de 12 : 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; ..

ppcm(9 ; 12) = 36

$\frac{2}{9} = \frac{2 \times 4}{9 \times 4} = \frac{8}{36}$ et $\frac{5}{12} = \frac{5 \times 3}{12 \times 3} = \frac{15}{36}$

On a $\frac{15}{36} > \frac{8}{36}$ on en déduit que $\frac{5}{12} > \frac{2}{9}$

Réduire 2 quotients au même dénominateur permet de comparer 2 quotients, de les ajouter ou soustraire.

Exemple 2 : Comparer les quotients $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$

Les dénominateurs 7 et 8 n'ont aucun diviseur commun autre que 1 ; on dit qu'ils sont premiers entre eux.

Le plus petit commun multiple est égal au produit $7 \times 8 = 56$.

$\frac{2 \times 8}{7 \times 8} = \frac{16}{56}$ $\quad \frac{3 \times 7}{8 \times 7} = \frac{21}{56}$ $\quad$ or $\frac{16}{56} < \frac{21}{56}$ donc $\frac{2}{7} < \frac{3}{8}$

3) Produit en croix et égalité de fractions :

Propriété des produits en croix :

a, b, c et d sont quatre nombres relatifs tels que b et d sont non nuls.

- si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors les produits en croix sont égaux : $a \times d = b \times c$
- Réciproquement : si $a \times d = b \times c$ alors les quotients $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égaux

Exemple : déterminer si deux fractions sont égales

a) $\dfrac{-12}{27}$ et $\dfrac{52}{-117}$

d'une part	d'autre part
$-12 \times -117 = 1404$	$27 \times 52 = 1404$

Les produits en croix sont égaux donc on conclut que $\dfrac{-12}{27} = \dfrac{52}{-117}$

b) Vérifier à la calculatrice si les quotients $\dfrac{75025}{46368}$ et $\dfrac{196418}{121393}$ sont égaux

La calculatrice indique que $75025/46368 = 1,618033989$ et que $196418/121393 = 1,618033989$

Les quotients semblent égaux pourtant lorsque l'on compare les produits en croix :

d'une part	d'autre part
le chiffre des unités de 75025×121393 est 5	le chiffre des unités de 196418×46368 est 4

Les produits en croix ne peuvent donc pas être égaux : $\dfrac{75025}{46368} \neq \dfrac{196418}{121393}$

4) Quatrième proportionnelle

Méthode : Pour déterminer le nombre manquant dans l'égalité de 2 quotients, on calcule la 4ᵉ proportionnelle à l'aide du produit en croix

Exemples :

- Déterminer le nombre manquant $\frac{-1{,}2}{6} = \frac{\dots}{7}$

soit x le nombre manquant : on a $\frac{-1{,}2}{6} = \frac{x}{7}$

Les quotients sont égaux donc les produits en croix sont égaux : $-1{,}2 \times 7 = x \times 6$

on divise membre à membre par 6 : $\frac{-1{,}2 \times 7}{6} = \frac{x \times \cancel{6}}{\cancel{6}}$

donc $x = \frac{-1{,}2 \times 7}{6} = -1{,}4$

pour déterminer la valeur manquante, on multiplie les deux qui sont en croix et on divise par celle qui reste.

- Déterminer le nombre manquant : $\frac{132}{\dots} = \frac{308}{49}$

On calcule la 4ᵉ proportionnelle : $\frac{132 \times 49}{308} = 21$ donc $\frac{132}{21} = \frac{308}{49}$

II Opérations sur les nombres en écriture fractionnaire

1) Multiplication :

Règle de multiplication de 2 fractions :

Pour multiplier 2 nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux, puis on multiplie les dénominateurs entre eux :

si a, b, c et d sont 4 nombres relatifs tels que b et d sont différents de 0 : $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$

Remarque 1 : Il est souvent préférable de simplifier avant d'effectuer les produits !

Exemple 1 : $5 \times \dfrac{-4}{9} = \dfrac{5 \times (-4)}{1 \times 9} = \dfrac{-20}{9}$

Exemple 2 : $\dfrac{7}{5} \times \dfrac{-4}{3} = \dfrac{7 \times (-4)}{5 \times 3} = \dfrac{-28}{15}$

Exemple 3 : $\dfrac{24}{-35} \times \dfrac{14}{16} = \dfrac{24 \times 14}{-35 \times 16} = \dfrac{\cancel{8} \times 3 \times \cancel{2} \times \cancel{7}}{-5 \times \cancel{7} \times \cancel{8} \times \cancel{2}} = -\dfrac{3}{5}$

Remarque 2 : Si $b = 1$ alors la formule devient $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$

Exemple : $9 \times \frac{4}{-7} = \frac{9 \times 4}{-7} = \frac{36}{-7}$

2) division de 2 quotients

a) inverse d'un nombre non nul

Définition : Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Propriétés :

- Tout nombre x non nul admet un inverse (noté x^{-1}) qui est le nombre $\frac{1}{x}$
- Tout nombre en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) admet un inverse qui est le nombre $\frac{b}{a}$.

Remarques :

- un nombre et son inverse ont toujours le même signe. En effet leur produit 1 est positif et seul le produit de deux nombres de même signe est positif.
- zéro est le seul nombre qui n'a pas d'inverse. En effet, tout nombre multiplié par 0 donne 0 et ne donnera jamais 1 !

Exemples : a) Donner l'inverse de 3.

b) Donner l'inverse de $\frac{-7}{3}$

a) L'inverse de 3 est $3^{-1} = \frac{1}{3}$

b) L'inverse de $\frac{-7}{3} = \left(\frac{-7}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{-7}{3}} = \frac{3}{-7} = \frac{-3}{7}$

b) diviser des quotients

Règle : Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par l'inverse de ce nombre.

Pour tous nombres a, b, c, d où b, c, d sont non nuls : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemple 1 : Calcule $C = \frac{-8}{7} \div \frac{5}{-3}$

- on détermine le signe du résultat : $(-) \div (-) \to (+)$
- on multiplie par l'inverse du 2e quotient $C = \frac{8}{7} \times \frac{3}{5}$

$C = \frac{24}{35}$

Exemple 2 : Calculer $D = \dfrac{-\dfrac{32}{21}}{\dfrac{-48}{-35}}$

• on détermine le signe du résultat : il est négatif

• on multiplie par l'inverse du 2e quotient : $D = -\dfrac{32}{21} \times \dfrac{35}{48}$

• on cherche des facteurs communs : $D = -\dfrac{\cancel{8} \times 2 \times \cancel{8} \times \cancel{7} \times 5}{\cancel{7} \times 3 \times \cancel{8} \times 3 \times \cancel{8}}$

$D = -\dfrac{10}{9}$

3) Additionner ou soustraire des nombres relatifs en écriture fractionnaire

Lorsque les dénominateurs sont les mêmes...

Pour additionner (ou soustraire) des fractions ayant **le même dénominateur**, il suffit de conserver le dénominateur commun, et d'additionner (ou soustraire) les numérateurs entre eux.

Si a, b et c sont des nombres relatifs (b non nul), on a $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$.

Exemples :

- $\dfrac{3}{4} + \dfrac{21}{4} = \dfrac{3+21}{4} = \dfrac{24}{4} = 6$
- $\dfrac{-4}{3} + \dfrac{17}{3} = \dfrac{-4+17}{3} = \dfrac{13}{3}$
- $\dfrac{15}{7} - \dfrac{4}{7} = \dfrac{15-4}{7} = \dfrac{11}{7}$

Lorsque les dénominateurs sont différents…

Pour additionner (ou soustraire) des fractions ayant **des dénominateurs différents**, on commence par les **réduire au même dénominateur**, avant d'appliquer la règle précédente.

Exemples :

- $\frac{3}{4}+\frac{21}{8}=\frac{3\times 2}{4\times 2}+\frac{21}{8}=\frac{6}{8}+\frac{21}{8}=\frac{6+21}{8}=\frac{27}{8}$ (*8 est le plus petit multiple commun à 4 et 8*)
- $\frac{-5}{6}+\frac{7}{4}=\frac{-5\times 2}{6\times 2}+\frac{7\times 3}{4\times 3}=\frac{-10}{12}+\frac{21}{12}=\frac{-10+21}{12}=\frac{11}{12}$ (*12 est le plus petit multiple commun à 4 et 6*)
- $\frac{-3}{7}+\frac{5}{8}=\frac{-3\times 8}{7\times 8}+\frac{5\times 7}{8\times 7}=\frac{-24}{56}+\frac{35}{56}=\frac{-24+35}{56}=\frac{11}{56}$ (*56 est le plus petit multiple commun à 7 et 8*)
- $\frac{-11}{6}+3=\frac{-11}{6}+\frac{3}{1}=\frac{-11}{6}+\frac{3\times 6}{1\times 6}=\frac{-11}{6}+\frac{18}{6}=\frac{-11+18}{6}=\frac{7}{6}$ (*3 est le plus petit multiple commun à 1 et 3*)