Calcul littéral et équations ordre

Chapitre 8

Classe de 4ème

Pour cette leçon, il serait judicieux d'avoir parcouru la leçon de 5ème à la disposition de chacun sur MonCahierDeMaths.

I- Expressions littérales

1- Définition (rappels de 5ème)

Une **expression littérale** est une expression dans laquelle un ou plusieurs nombres sont représentés par des lettres. Une même lettre désigne toujours un même nombre dans une expression littérale donnée.

a) Remplacer la lettre par un nombre dans une expression littérale

exemple :

$E = 4x^2 - x + 3$ est une expression littérale dans laquelle un nombre est représenté par la lettre x

On peut **calculer la valeur de cette expression** lorsque la lettre prend une valeur donnée.

Par exemple, pour $x = -2$, on a $E = 4\times(-2)^2 \boxed{-(-}2) + 3 = 4\times4+2+3 = 16+2+3 = 21$

b) Tester une égalité

Tester si l'égalité $2x + 4 = 13 - x$ est vraie pour $x = 3$

- **D'une part,** le premier membre vaut $2\times3+4 = 6+4=10$,
- **D'autre part** le second membre vaut $13-3 = 10$

Comme les deux membres ont la même valeur, l'égalité est vérifiée.

2- Rappels sur la distributivité simple

a) Développer à l'aide de la distributivité simple

définition

Développer un produit signifie l'écrire sous la forme d'une somme ou d'une différence.

Soient k, a et b trois nombres relatifs. On a :
$k(a+b) = k \times a + k \times b$ autrement dit, en simplifiant l'écriture, $k(a+b) = ka + kb$

exemples :

$2(3 + 5x) = 2 \times 3 + 2 \times 5x = 6 + 10x = 10x + 6$

$5y(3 - 2y) = 5y \times 3 - 5y \times 2y = 15y - 10y^2$

2- Rappels sur la distributivité simple

b) Factoriser à l'aide de la distributivité simple

définition

Factoriser une somme ou une différence signifie l'écrire sous la forme d'un produit.

Soients k, a et b trois nombres relatifs. On a :
$\underline{k} \times a + \underline{k} \times b = \underline{k} \times (a + b)$ autrement dit, en simplifiant l'écriture, $ka + kb = k(a + b)$

exemples :

- $\underline{5}x + \underline{5}y = \underline{5}\,(x + y)$
- $3\underline{b} - 5\underline{b} = \underline{b}\,(3 - 5) = -2b$
- $3\underline{x}^2 - \underline{x} = \underline{x}\,(3x - 1)$

Méthode : On a **2 termes** séparés par un **moins**, on doit **obligatoirement** retrouver **2 termes** séparés par un **moins** à l'intérieur de la parenthèse de factorisation.

$3x^2 - x = 3x \times \underline{x} - 1 \times \underline{x} = \underline{x}\,(3x - 1)$

2- Rappels sur la distributivité simple

c) Réduire une expression

définition

Réduire une expression littérale consiste à effectuer la somme algébrique des termes "de même nature", afin d'écrire cette expression avec le moins de termes possibles.

exemples :

- $5x - 2 + 3x + 7 = 5x + 3x - 2 + 7 = 8x + 5$

On a regroupé d'une part les **"termes en x"**, d'autre part les **"termes constants "**.

- $5x^2 + x - 7x^2 + 5x - 11 = 5x^2 - 7x^2 + x + 5x - 11 = -2x^2 + 6x - 11$

On a regroupé entre eux les **" termes en x^2 "**, les **"termes en x "** et enfin les **"termes constants ".**

3- Suppression de parenthèses

a) Parenthèses précédées d'un signe « + »

méthode

Pour ajouter une somme algébrique écrite entre parenthèses, il suffit d'additionner chaque terme de cette somme algébrique :
Pour tous nombres relatifs a, b, c et d, on a: $a + (b + c - d) = a + b + c - d$;
autrement dit : **on enlève tout simplement les parenthèses**

exemples :

- $2x + (3 + 5x) = 2x + 3 + 5x = 7x + 3$
- $5 + (9x - 1) = 5 + 9x - 1 = 9x + 4$

3- Suppression de parenthèses

b) Parenthèses précédées d'un signe « − »

méthode

Pour **soustraire** une somme algébrique écrite entre parenthèses, il suffit d'**additionner l'opposé** de chaque terme de cette somme algébrique :
Pour tous nombres relatifs a, b, c et d, on a a −(b+c −d) = a − b − c + d;
autrement dit : **lorsqu'il y a un signe « − » devant une parenthèse, on change tous les signes à l'intérieur de la parenthèse.**

exemples :

- $2x - (3 + 5x) = 2x - 3 - 5x = -3x - 3$

- $5 - (9x - 1) = 5 - 9x + 1 = -9x + 6$

4- Double distributivité

règles

Soient *a, b, c et d* quatres nombres relatifs. On a :

- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- $(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$
- $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$
- $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd \longrightarrow$ *car (-b)(-d)=(+bd)*

exemples :

- $(x + 2)(x + 5) = \boldsymbol{x \times x + x{\times}5 + 2{\times}x} + 2{\times}5 \quad = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$
- $(3x + 2)(2x - 5) = 3x \times 2x - 3x{\times}5 + 2{\times}2x - 2{\times}5 = 6x^2 - 15x + 4x - 10 = 6x^2 - 11x - 10$

II- Equations et problèmes

1- Résoudre une équation du premier degré

a) définitions

•Une **équation** est une égalité dans laquelle un nombre, appelé **inconnue** de l'équation, est représenté par une lettre.
• S'il en existe, la (ou les) valeur(s) de l'inconnue pour la(les)quelle(s) l'égalité est vraie sont appelées **solutions** de l'équation.
• **Résoudre** une équation consiste à trouver **toutes** ses solutions.

Par exemple :

$2x + 3 = 11$ est une équation, d'inconnue x.
On dit qu'elle est du **premier degré**, car la plus grande puissance de x est 1.

• $x = 2$ **n'est pas** solution de cette équation ;
en effet, on a $2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7$ ce n'est donc pas égal à 11.

• $x = 4$ **est** solution de cette équation ; en effet, on a $2 \times 4 + 3 = 8 + 3 = 11$

1- Résoudre une équation du premier degré

b) Méthode : comment résoudre une équation

On s'appuie sur deux règles de calcul sur les égalités :

Soient a, b et c trois nombres relatifs.

On ne change pas une égalité (*c'est-à-dire qu'une égalité vraie reste vraie*) **lorsque:**

- on **ajoute** (ou on **soustrait**) un **même nombre** à ses deux membres,

  en effet, **Si** $a = b$ **alors** $a + c = b + c$ **et** $a - c = b - c$

- on **multiplie** (ou on **divise**) par un **même nombre** chacun de ses deux membres,

  en effet, **Si** $a = b$ **alors** $a \times c = b \times c$ **et** $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Application à la résolution d'une équation :

Pour résoudre une équation de ce type, on doit **isoler** l'inconnue x dans l'un des membres de l'équation.

$$\begin{aligned} x + 7 &= -2x - 2 \\ x + 7 + 2x &= -2x - 2 + 2x \end{aligned} \quad (+\,2x)$$

1-On commence par ajouter $2x$ aux deux membres de l'équation, pour éliminer les x du second membre.

$$\begin{aligned} 3x + 7 &= -2 \\ 3x + 7 - 7 &= -2 - 7 \end{aligned} \quad (-\,7)$$

2-Ensuite on soustrait 7 aux deux membres de l'équation, pour éliminer les termes constants du premier membre.

$$\begin{aligned} 3x &= -9 \\ \frac{3x}{3} &= -\frac{9}{3} \end{aligned} \quad (\div 3)$$

3-On termine en divisant par 3 les deux membres de l'équation pour finir d'isoler l'inconnue.

$$\boxed{x = -3}$$

La solution de cette équation est -3

Vérification : **d'une part** -3 + 7 = 4 ; **d'autre part** -2x(-3) - 2 = 6 – 2 = 4.

2- Mise en équation d'un problème

On s'appuie sur une **méthode** en 4 étapes :

Exemple :

Deux enfants, Adrien et Béatrice, jouent aux billes.
Adrien dit : "J'ai seize billes de moins que toi. . . " ; ce à quoi Béatrice répond : "J'en ai trois fois plus que toi !".
Combien de billes possède Adrien ?

Etape n°1 : choix de l'inconnue	• Soit x le nombre de billes que possède Adrien.
Etape n°2 : mise en équation du problème	• La phrase "J'ai seize billes de moins que toi" se traduit par "Béatrice possède x +16 billes". • La phrase "J'en ai trois fois plus que toi ! se traduit par "Béatrice possède $3x$ billes". • On a donc l'équation $x + 16 = 3x$

Etape n°1 : choix de l'inconnue	• Soit x le nombre de billes que possède Adrien.
Etape n°2 : mise en équation du problème	• La phrase "J'ai seize billes de moins que toi" se traduit par "Béatrice possède x +16 billes". • La phrase "J'en ai trois fois plus que toi !« se traduit par "Béatrice possède 3x billes". • On a donc l'équation $x + 16 = 3x$
Etape n°3 : résolution de l' équation	$-x$ $\quad x + 16 = 3x \quad$ $-x$ $x + 16 - x = 3x - x$ $\div 2$ $\quad 16 = 2x \quad$ $\div 2$ $\frac{16}{2} = \frac{2x}{2}$ $\boxed{x = 8}$ La solution de cette équation est 8 Vérification : **d'une part** 8 + 16 = 24 ; **d'autre part** 3x8 = 24
Etape n°4 : interprétation et conclusion	*Le résultat est un nombre entier positif, ce qui est cohérent avec l'énoncé.* Adrien possède 8 billes (et Béatrice 24).

III- Inéquations, ordre

1- définition

a) définitions

•Une inéquation est une inégalité dans laquelle un nombre, appelé inconnue de l'inéquation, est représenté par une lettre.

b) Comment savoir si pour une valeur donnée, une inéquation est vérifiée ou non?

Par exemple :

$2x + 3 < 11$ est une inéquation, d'inconnue x.
On dit qu'elle est du **premier degré**, car la plus grande puissance de x est 1.

- pour $x = 2$ l'inégalité est **vérifiée**;
  en effet, d'une part le premier membre vaut : $2\times2 + 3 = 4 + 3 = 7$
  d'autre part le second membre vaut 11.
- pour $x = 5$ l'inégalité n'est pas **vérifiée**;
  en effet, d'une part le premier membre vaut : $2\times5 + 3 = 10 + 3 = 13$
  d'autre part le second membre vaut 11.

2- Règles de calcul

Soient a, b et c trois nombres relatifs.

On ne change pas une inégalité (*c'est-à-dire qu'une inégalité vraie reste vraie*) lorsque:

• on **ajoute** (ou on **soustrait**) un **même nombre** à ses deux membres,

en effet, **Si** $a < b$ **alors** $a + c < b + c$ **et** $a - c < b - c$

• on **multiplie** (ou on **divise**) par un **même nombre** positif chacun de ses deux membres,

en effet, **Si** $a < b$ ***et si*** $c>0$ **alors** $a \times c < b \times c$ **et** $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Attention !!!

On obtient une inégalité de sens contraire lorsque:

• on **multiplie** (ou on **divise**) par un **même nombre** négatif chacun de ses deux membres,

en effet, **Si** $a < b$ ***et si*** $c<0$ **alors** $a \times c > b \times c$ **et** $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Exemples :
Feuille d'exercices, exercices n°1,2,3,6

On obtient une inégalité de sens contraire lorsque:

• on **multiplie** (ou on **divise**) par un **même nombre** **négatif** chacun de ses deux membres,

en effet, **Si** $\boxed{a < b \textbf{ et si } c<0 \quad \textbf{alors} \quad a \times c > b \times c \quad \textbf{et} \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}}$

Exemples :
Feuille d'exercices, exercice n°7