Proportions et grandeurs quotients

Chapitre 7

Classe de 4ème

I- Grandeurs proportionnelles

1- Définition (rappels de 6ème / 5ème)

Deux grandeurs sont dites proportionnelles si on passe des valeurs de l'une aux valeurs de l'autre **en multipliant toujours par le même nombre**, appelé coefficient de proportionnalité.

Exemple : On présente les 2 grandeurs étudiées dans un tableau

poids	Grandeur n°1	5	11	1
prix	Grandeur n°2	12	24,2	2,2

$\times 2,2$

Ce tableau est un tableau de proportionnalité et le coefficient de proportionnalité est k=2,2 : il correspond à la quantité de la grandeur 2 associée à une quantité de une unité de la grandeur 1.

poids	Grandeur n°1	5	11	1
prix	Grandeur n°2	12	24,2	2,2

$\times 2,2$

❖On peut ajouter une nouvelle colonne à un tableau de proportionnalité en multipliant l'une des colonnes par un nombre non nul

$\times 3$

poids	Grandeur n°1	5	11	15	1
prix	Grandeur n°2	12	24,2	36	2,2

$\times 3$

$\times 2,2$

15 + 1 = 16

36 + 2,2 = 38,2

❖On peut ajouter une nouvelle colonne à un tableau de proportionnalité en ajoutant 2 colonnes

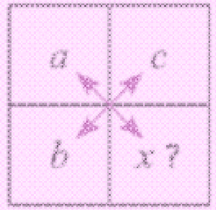
poids	Grandeur n°1	5	11	16	1
prix	Grandeur n°2	12	24,2	38,2	2,2

$\times 2,2$

2- Quatrième proportionnelle

Dans une situation de proportionnalité, la **quatrième proportionnelle** est le quatrième nombre x calculé à partir des 3 autres nombres *a*, *b* et *c* déjà connus.

Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité :



a, b et c sont différents de zéro.

On a $\dfrac{b}{a} = \dfrac{x}{c}$

Par égalité des produits en croix $a \times x = b \times c$

On obtient donc $x = \dfrac{b \times c}{a}$

<u>Exemple :</u> compléter le tableau de proportionnalité suivant

poids	Grandeur n°1	5	21
prix	Grandeur n°2	12	x

$$x = \frac{21 \times 12}{5}$$

$$x = 50,4$$

3- Pourcentages

a) appliquer un pourcentage

Appliquer un pourcentage à une quantité revient à la multiplier par une fraction.

Exemples :

1) 35% de 600 € = $\frac{35}{100}$ x 600 € = 0,35 x 600 € = 210 €

2) Dans un bureau de vote, il y a eu 450 votants et parmi eux 40% ont voté pour le candidat A. Déterminons combien de personnes ont voté pour le candidat A.

40% x 450 = 0,4 x 450 = 180

b) Calculer un pourcentage

Dans une classe de 24 élèves, on trouve 15 garçons. Déterminons le pourcentage de garçons dans cette classe.

a) La proportion de garçons dans la classe est de 15 sur 24 soit une fraction de $\frac{15}{24}$

en écriture décimale $\frac{15}{24}$ = 0,625 ce qui correspond aussi à une fraction de $\frac{62,5}{100}$
soit <u>62,5%</u>

b) On peut aussi compléter le tableau de proportionnalité suivant :

Effectif garçons	15	x
Effectif total	24	100

$$x = \frac{15\text{x}100}{24} = 62,5$$

La proportion de garçons dans la classe est de 62,5 pour 100 soit 62,5%

c) Méthodes

A

Il est important de bien identifier la grandeur **par rapport** à laquelle on calcule le pourcentage.

Dans l'exemple précédent, on calcule le pourcentage de garçons **par rapport à** l'effectif total de la classe : $\frac{15}{24} = 0,625 = \frac{62,5}{100} = 62,5\%$

<u>Autre exemple</u> :

Une paire de chaussure passe de 110 € à 135 €. Déterminons le pourcentage d'augmentation du prix de cette paire de chaussures.

Tout d'abord, le prix augmente et l'écart de prix est de (135 - 110) = 25 €.

L' augmentation est relative au prix de départ : la proportion de l'augmentation

par rapport au prix initial est de 25 euros **par rapport** aux 110 euros initiaux,

ce qui correspond à une fraction de $\frac{25}{110} = 0,227$ soit 22,7%

B

Les pourcentages ne s'additionnent ni ne se soustraient.

Exemple :
Le prix d'une télévision qui coûte 1000€ subit lundi une hausse de 20% puis le mercredi une baisse de 20%. Le prix de la télévision le jeudi est - il revenu à 1000 €?

Première approche :

La hausse de 20% provoque un écart de prix de 20% x 1000 = 0,2x1000 = 200 €

La baisse de 20% s'applique sur le prix de mardi, à savoir 1000 + 200 = 1200 €

Mercredi, le prix va baisser de 20% x 1200 = 0,2 x 1200 = 240 €

Finalement, jeudi le prix de la télévision devient 1200 - 240 = 960 €

Approche plus rigoureuse: le coefficient multiplicateur

avec cette méthode, on n'a pas besoin de calculer la variation de la grandeur, on obtient immédiatement la valeur finale.

La hausse de 20% fait que le client va payer non plus 100% du prix, mais 120% du prix, soit 1,2 fois le prix initial.

Le nouveau prix mardi sera donc 120%x1000 = $\underline{1{,}2}$ x 1000 = 1200 €

Mercredi, le prix va baisser de 20%, donc le client paiera 80% du prix affiché mardi : 80% x 1200 = $\underline{0{,}8}$ x 1200 = 960 €

Au bilan le prix de la télévision est multiplié par 1,2 puis par 0,8, donc au total, par 1,2X0,8. On a bien 1,2 X 0,8 X 1000 = 960

4- Indices en base 100

a) définition

Dans un tableau de proportionnalité, l'indice 100 est attribué à une situation de référence : les indices suivants permettent de mesurer l'écart (augmentation ou baisse) en pourcentage par rapport à la situation de référence.

Le terme « pourcentage » prend alors toute sa signification.

b) exemple : le zoo

Le tableau suivant indique le nombre d'animaux dans un zoo. On prend comme année de référence l'année 2000 en lui affectant l'indice 100.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Population	1 250	1 200	1 000	1 250	1 500	2 000
Indice	100	96	80	100	120	160

On a complété le tableau à l'aide de produits en croix, en partant toujours de la situation connue (on évite en effet de reproduire une éventuelle erreur de calcul):

$$I_{2002} = \frac{1000 \text{x} 100}{1250} = 80$$

La lecture du tableau permet d'en déduire que :

entre 2000 et 2004, la population du zoo a augmenté de 20%;

entre 2000 et 2002, la population du zoo a diminué de 20%.

De 2004 à 2005, la population du zoo passe de 1500 à 2000, l'indice passe de 120 à 160 : la population a augmenté.

Attention !

L'augmentation entre les années 2004 et 2005 n'est pas de 40 pour cent mais de 40 pour 120:

$$\frac{40}{120} \approx 0,3333 = \frac{33,33}{100} = 33,33\%$$

La population du zoo a augmenté de 33,33% entre 2004 et 2005

Le tableau d'indices ne fournit pourtant pas le **pourcentage** d'augmentation entre ces 2 années : en effet l'année 2004 n'est pas l'année de référence.

En plaçant l'indice 100 à l'année 2004 on obtient le tableau suivant :

année	2004	2005
population	1500	2000
indice	**100**	**133,33**

$$I_{2005} = \frac{2000 \times 100}{1500} = 133,33$$

La population du zoo a bien augmenté de 33,33% entre 2004 et 2005

II- Proportionnalité et représentation graphique

1- repérage dans le plan (rappels de 5ème)

Définition 1

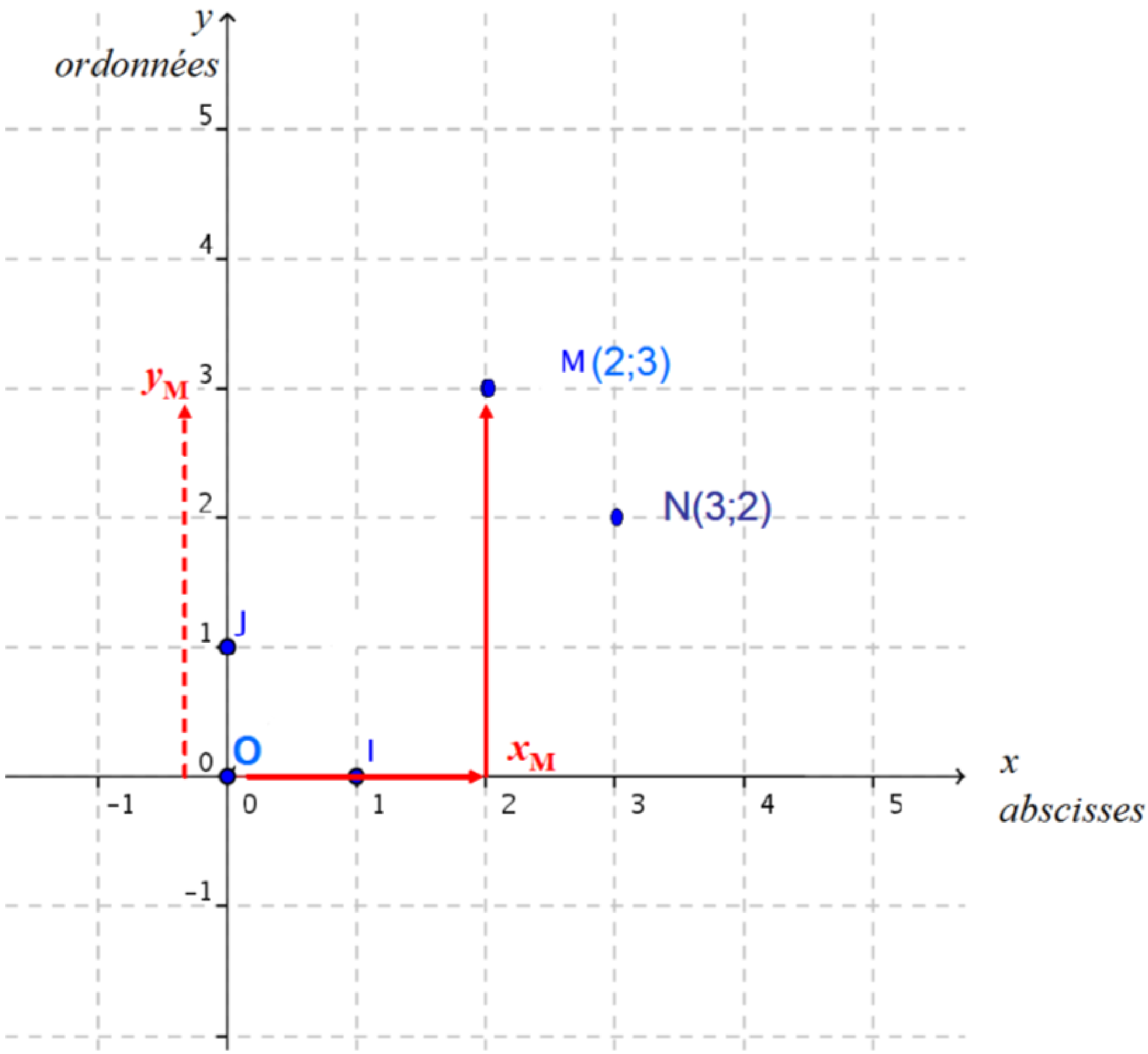
Un **repère orthonormal** du plan est défini par la donnée de 3 points non alignés O, I, J formant un triangle rectangle isocèle de sommet O. On note alors (O; I; J) le repère ainsi défini.

Définition 2

Soit (O; I; J) un repère du plan. A tout point M du plan, on associe un unique couple (x; y) de nombres réels appelé couple de coordonnées du point M dans le repère (O; I; J).

x est appelé abscisse du point M;

y est appelé ordonnée du point M;


y
ordonnées
5
4
3
2
1
0
-1
y_M
M (2;3)
N(3;2)
J
O
I
x_M
-1
0
1
2
3
4
5
x
abscisses

2- proportionnalité et représentation graphique

Dans un repère du plan :

• **si** on représente une situation de proportionnalité **alors** on obtient des points **alignés avec l'origine** du repère.

réciproquement :

• **si** on a des points alignés avec l'origine du repère, **alors** cette représentation graphique illustre une situation de proportionnalité.

Exemple :

On considère la situation suivante :

poids	Grandeur n°1	10	20	25
prix	Grandeur n°2	4	8	10

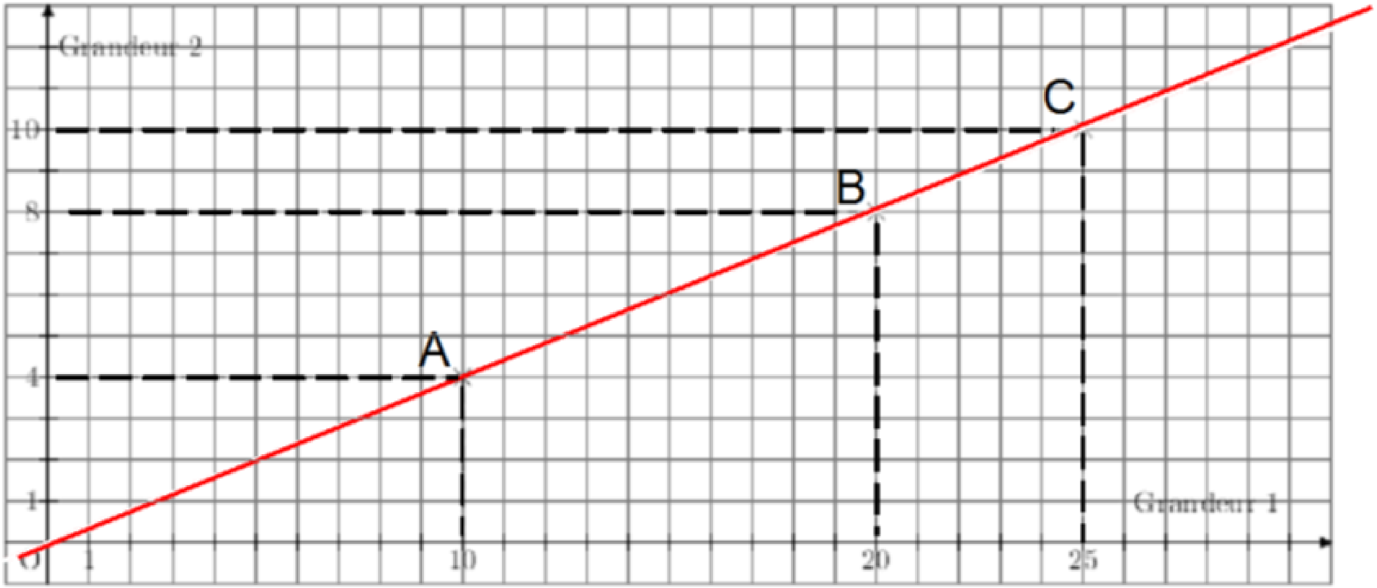
Plaçons ces données dans un repère en définissant des points

A(10;4) B(20;8) C(25;10)

poids	Grandeur n°1	10	20	25
prix	Grandeur n°2	4	8	10

$\times 0,4$

A(10;4) B(20;8) C(25;10)



Les points sont alignés avec l'origine du repère : cela traduit une situation de proportionnalité

$$k = \frac{4}{10} = \frac{8}{20} = \frac{10}{25} = 0,4$$

III- Calculer une vitesse moyenne, une distance, une durée.

1- définition :

Si un mobile parcourt une distance d en un temps t alors sa vitesse moyenne sur le parcours est : $v = \dfrac{d}{t}$

D'après l'égalité des produits en croix, on a aussi : $d = v \text{x} t$; $t = \dfrac{d}{v}$

2- calculer une vitesse moyenne :

Un automobiliste effectue un trajet de 522km en 6 heures. Quelle est sa vitesse moyenne?

On applique la formule : $v = \dfrac{d}{t}$

ici, on a d = 522 km et t = 6 h ;

on a donc $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{522}{6} = 87 km / h \text{ ou } 87 km\ h^{-1}$

Cet automobiliste roule donc à la vitesse moyenne de 87 km/h.

Déterminons la vitesse en mètres par seconde (m/s ou m s^{-1}) :

On peut effectuer un **changement d'unité de vitesse** de la manière suivante :

d= 522km = 522 000 m et 6h = 6 x (3600s) = 21 600 s ;

ainsi $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{522000}{21600} \approx 24 m / s \text{ ou } 24\ m\ \mathrm{s}^{-1}$

3- calculer une distance :

Un automobiliste roule à la vitesse moyenne de 64 km/h pendant 3h15min. Quelle distance a-t-il parcourue?

On commence par convertir la durée du parcours en **nombre décimal d'heures:**

$$3h15\min = 3h\frac{15}{60}h = 3h\frac{1}{4}h = 3,25h$$

Puis on applique la formule : *d* = *v* x *t* = 64 x 3,25 = 208 km.

Cet automobiliste a parcouru 208 km.

4- calculer une durée :

Un automobiliste roule à la vitesse moyenne de 80 km/h sur une distance de 272 km. Combien de temps ce parcours dure t-il?

On applique la formule : $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{272}{80} = 3,4h$

On convertit en heures et en minutes la durée ainsi trouvée :

3,4h = 3h + 0,4h = 3h + (0,4x60)min = 3h24min.

Cet automobiliste roulera pendant 3h et 24min.