Triangle rectangle et cercle circonscrit

Chapitre 2

Classe de 4ème

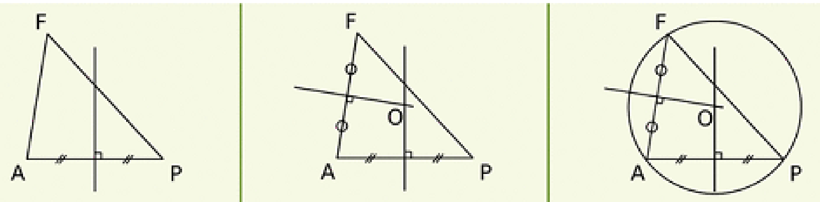
I- RAPPELS : DEFINITIONS

1- Cercle circonscrit à un triangle

Propriété : Dans un triangle, les médiatrices des 3 côtés sont concourantes.

Le point de concours des trois médiatrices d'un triangle est **le centre du cercle circonscrit au triangle**. Ce cercle passe par les trois sommets du triangle.

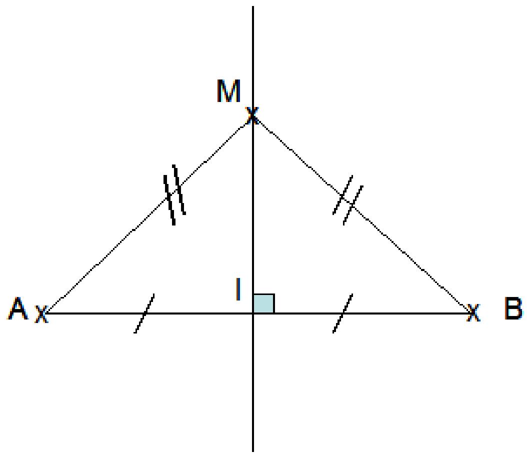
Exemple : Trace le cercle circonscrit au triangle PAF.



On construit la médiatrice du segment [AP].	Il suffit de construire les médiatrices de deux côtés. Elles se coupent en O.	Le cercle circonscrit est le cercle de centre O et de rayon OA (ou OF ou OP).

2- Médiatrice

La médiatrice d'un segment [AB], notée med [AB] est la droite constituée de l'ensemble des points du plan équidistants de A et de B. Pour tout point M de cette droite, MA=MB. La médiatrice coupe le segment [AB] perpendiculairement, en son milieu.

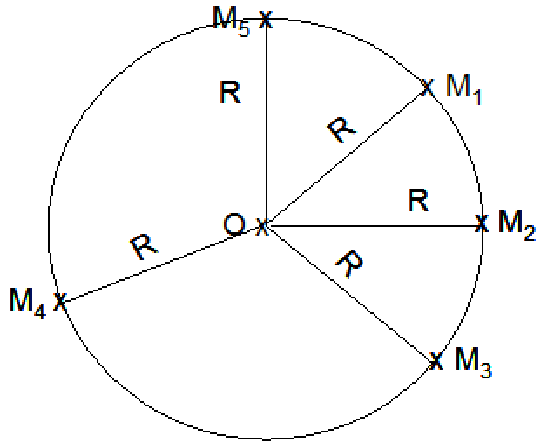


I=m[AB]

3- cercle

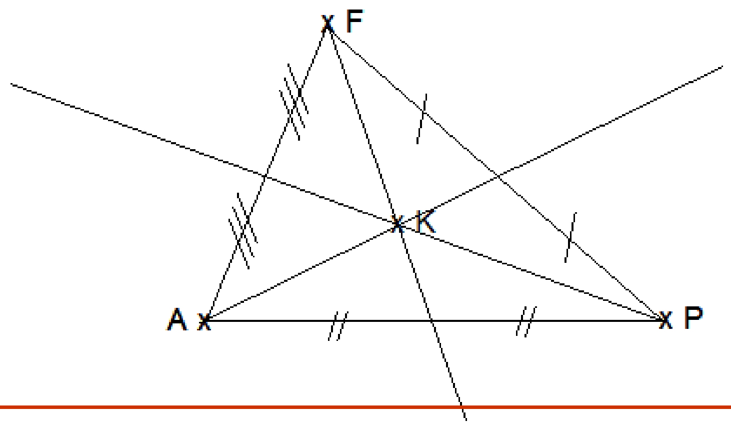
Un cercle est formé par un ensemble de points qui sont situés à une distance donnée d'un point appelé centre du cercle. Cette distance est appelée rayon du cercle.

Le cercle de centre O et de rayon R est constitué de l'ensemble des points M du plan tels que OM=R.



4- Médiane

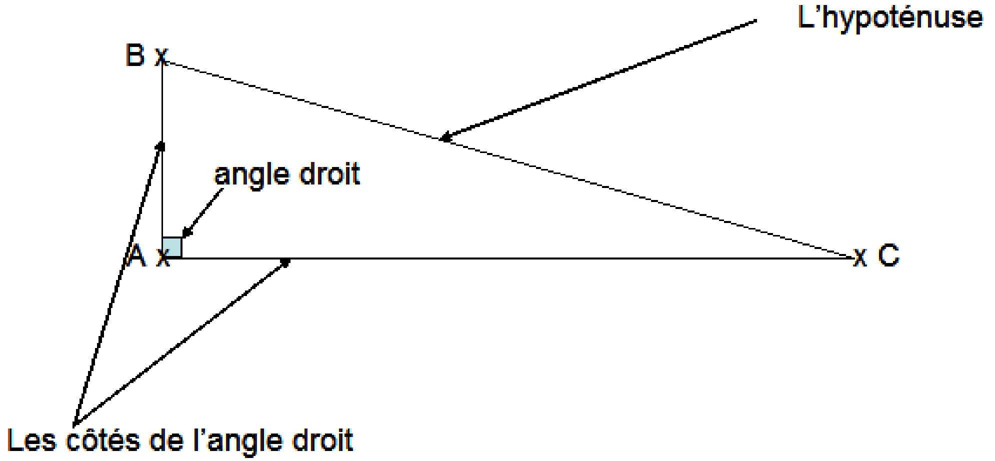
Dans un triangle, on appelle **médiane** une droite passant par un sommet du triangle et par le milieu du côté opposé à ce sommet.



Dans un triangle, les médianes sont concourantes.

5- Triangle rectangle

Un triangle rectangle possède un angle droit (90°). Le côté opposé à l'angle droit est le plus grand côté et est nommé hypoténuse.



II. Cercle circonscrit à un triangle rectangle

1) Activité (à coller)

II. Cercle circonscrit à un triangle rectangle

2) Théorème TRCC : triangle rectangle et cercle circonscrit

a- Théorème direct : *pour démontrer qu'un point est sur un cercle*

Si un triangle est rectangle, **alors** il est inscrit dans un cercle dont le centre est le milieu de l'hypoténuse.

Si un triangle est rectangle, **alors** il est inscrit dans un cercle dont le diamètre est son hypoténuse.

Activité : démonstration du théorème.

2) Théorème TRCC : triangle rectangle et cercle circonscrit

b- Corollaire

Si un triangle est rectangle, alors la médiane issue du sommet de l'angle droit a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

II. Cercle circonscrit à un triangle rectangle

2) Théorème TRCC : triangle rectangle et cercle circonscrit

c- contraposée

Vocabulaire :

La contraposée sert à fournir la négation d'une propriété :
A et B étant 2 propositions, la contraposée de la proposition
*« **si** A **alors** B » est « **si** (non B) **alors** (non A) »;*
(non A) et (non B) étant les négations des propositions
A et B.

A B

Exemple : « **si** je bois **alors** je ne conduis pas. »

NON B NON A

*La contraposée sera : « **si** je conduis **alors** je ne bois pas »*

II. Cercle circonscrit à un triangle rectangle

2) Théorème TRCC : triangle rectangle et cercle circonscrit

Contraposée du TRCC

Si un triangle est inscrit dans un cercle et qu' *aucun de ses côtés* n'est un diamètre du cercle, alors ce *n'est pas un triangle rectangle.*

II. Cercle circonscrit à un triangle rectangle

Remarques : méthode.

1) On appliquera systématiquement une démarche en 3 étapes pour construire sa démonstration :
   - 1. Faire l'inventaire des **données** (ou « hypothèses »), c 'est à dire **ce que l'on sait**.
   - 2. Enoncer les propriétés que l'on peut invoquer du fait des données de l'énoncé
   - 3. Conclure sa démonstration.

2) La difficulté n'est pas d'appliquer le théorème direct mais d'être certain que l'hypothèse «triangle rectangle» est bien vérifiée : le plus souvent, cette condition est «cachée» dans l'énoncé et il faut la prouver auparavant.

Qu'en est-il d'un triangle inscrit dans un cercle et dont un des côtés est un diamètre de ce cercle ? Est-il rectangle ?

Activité : démonstration de la forme réciproque du TRCC

III. Réciproque du théorème triangle rectangle et cercle circonscrit

1)Réciproque du TRCC : **pour démontrer qu'un triangle est rectangle**

a) **Si** un triangle est inscrit dans un cercle dont le centre est le milieu du plus grand côté, **alors** il est rectangle et le plus grand côté est son hypoténuse

b) **Si** un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'un des côtés du triangle, **alors** il est rectangle et le diamètre est son hypoténuse.

III. Réciproque du théorème triangle rectangle et cercle circonscrit

1) Théorème TRCC : pour démontrer qu'un triangle est rectangle

c) Corollaire

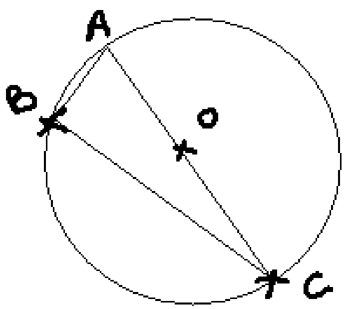
Si dans un triangle la longueur de la médiane relative à l'un des côtés est égale à la moitié de ce côté, alors ce triangle est rectangle et admet ce côté pour hypoténuse.

2) Démonstration

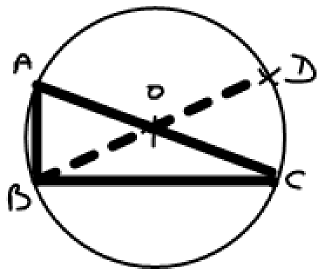
Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle de diamètre AC.

Soit O=m[AC]

On fait une figure :



Démontrons que
ABC est rectangle en B.



Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle de diamètre AC. On note 0 le milieu de AC.

1) On construit le point D, symétrique de B par rapport à O.

Le point D ....appartient....donc au cercle.

2) Les ...diagonales...du quadrilatère ABCD se coupent en leur ....milieu......., donc le quadrilatère ABCD est un ...parallélogramme...

3) On a de plus ..AC.. = ..BD.. = ..2×OB.., on déduit que le ...parallélogramme... ABCD est un ...rectangle... .

4) Or, dans un ...rectangle..., les côtés sont deux à deux ...perpendiculaires...

5) Ce qui signifie que le triangle ABC est ...rectangle... en ..B.. et que [AC] est son ...hypoténuse...