

Chapitre 3: Nombres en écriture fractionnaire

I Égalité de quotients

1) transformer, simplifier une écriture fractionnaire :

Règle: Si on multiplie ou si on divise le numérateur et le dénominateur d'un quotient par un même nombre non nul alors on obtient un quotient égal.

Pour tous nombres a, b et k non nuls $\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$ et $\frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}$

Exemple 1: Simplifier le quotient $\frac{42}{-140}$

• on détermine le signe du quotient : $\frac{42}{-140} = -\frac{42}{140}$

• on détermine les facteurs communs à 42 et 140 $-\frac{42}{140} = -\frac{3 \times \cancel{2} \times \cancel{7}}{10 \times \cancel{7} \times \cancel{2}}$

• on simplifie le quotient : $\frac{42}{-140} = -\frac{3}{10}$

Exemple 2: Déterminer le nombre manquant dans l'égalité $\frac{-1,2}{6} = \frac{\dots}{18}$

• Pour passer de 6 à 18 on a multiplié par 3; ainsi pour trouver le nombre manquant on va

multiplier $-1,2$ par 3:

$$\frac{-1,2 \times 3}{6 \times 3} = \frac{-3,6}{18}$$

2) Réduction de quotients au même dénominateur:

Exemple 1: Réduire les quotients $\frac{2}{9}$ et $\frac{5}{12}$ au même dénominateur

On cherche le plus petit commun multiple non nul, aux dénominateurs:

on dresse la liste des multiples de 9: 9; 18; 27; 36; 45; 54; ...

$$\text{ppcm}(9; 12) = 36$$

multiples de 12: 12; 24; 36; 48; 60; ...

$$\frac{2}{9} = \frac{2 \times 4}{9 \times 4} = \frac{8}{36}$$

$$\text{et } \frac{5}{12} = \frac{5 \times 3}{12 \times 3} = \frac{15}{36}$$

On a $\frac{15}{36} > \frac{8}{36}$ on en déduit que $\frac{5}{12} > \frac{2}{9}$

Réduire 2 quotients au même dénominateur permet de comparer 2 quotients, de les ajouter ou soustraire.

Exemple 2: Comparer les quotients $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$

Les dénominateurs 7 et 8 n'ont aucun diviseur commun autre que 1; on dit qu'ils sont *premiers entre eux*.

Le plus petit commun multiple est égal au produit $7 \times 8 = 56$.

$$\frac{2 \times 8}{7 \times 8} = \frac{16}{56} \quad \frac{3 \times 7}{8 \times 7} = \frac{21}{56} \quad \text{or} \quad \frac{16}{56} < \frac{21}{56} \quad \text{donc} \quad \frac{2}{7} < \frac{3}{8}$$

3) Produit en croix et égalité de fractions:

Propriété des produits en croix :

a, b, c et d sont quatre nombres relatifs tels que b et d sont non nuls.

• si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors les produits en croix sont égaux : $a \times d = b \times c$

• Réciproquement : si $a \times d = b \times c$ alors les quotients $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égaux

Exemple: déterminer si deux fractions sont égales

a) $\frac{-12}{27}$ et $\frac{52}{-117}$

d'une part

$$-12 \times -117 = 1404$$

d'autre part

$$27 \times 52 = 1404$$

Les produits en croix sont égaux donc on conclut que $\frac{-12}{27} = \frac{52}{-117}$

b) Vérifier à la calculatrice si les quotients $\frac{75025}{46368}$ et $\frac{196418}{121393}$ sont égaux

La calculatrice indique que $75025/46368 = 1,618033989$ et que $196418/121393 = 1,618033989$

Les quotients semblent égaux pourtant lorsque l'on compare les produits en croix :

d'une part

le chiffre des unités de 75025×121393 est 5

d'autre part

le chiffre des unités de 196418×46368 est 4

Les produits en croix ne peuvent donc pas être égaux : $\frac{75025}{46368} \neq \frac{196418}{121393}$

4) Quatrième proportionnelle

Méthode: Pour déterminer le nombre manquant dans l'égalité de 2 quotients, on calcule la 4^e proportionnelle à l'aide du produit en croix

Exemples: • Déterminer le nombre manquant $\frac{-1,2}{6} = \frac{\dots}{7}$

soit x le nombre manquant : on a $\frac{-1,2}{6} = \frac{x}{7}$

Les quotients sont égaux donc les produits en croix sont égaux : $-1,2 \times 7 = x \times 6$

on divise membre à membre par 6 : $\frac{-1,2 \times 7}{6} = \frac{x \times \cancel{6}}{\cancel{6}}$

$$\text{donc } x = \frac{-1,2 \times 7}{6} = -1,4$$

pour déterminer la valeur manquante, on multiplie les deux qui sont en croix et on divise par celle qui reste.

• Déterminer le nombre manquant : $\frac{132}{\dots} = \frac{308}{49}$

On calcule la 4^e proportionnelle : $\frac{132 \times 49}{308} = 21$ donc $\frac{132}{21} = \frac{308}{49}$

II Opérations sur les nombres en écriture fractionnaire

1) Multiplication:

Règle de multiplication de 2 fractions:

Pour multiplier 2 nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux, puis on multiplie les dénominateurs entre eux:

si a, b, c et d sont 4 nombres relatifs tels que b et d sont différents de 0 : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Remarque 1: Il est souvent préférable de simplifier avant d'effectuer les produits !

$$\text{Exemple 1: } 5 \times \frac{-4}{9} = \frac{5 \times (-4)}{1 \times 9} = \frac{-20}{9}$$

$$\text{Exemple 2: } \frac{7}{5} \times \frac{-4}{3} = \frac{7 \times (-4)}{5 \times 3} = \frac{-28}{15}$$

$$\text{Exemple 3: } \frac{24}{-35} \times \frac{14}{16} = \frac{24 \times 14}{-35 \times 16} = \frac{\cancel{8} \times 3 \times \cancel{2} \times \cancel{4}}{-5 \times \cancel{7} \times \cancel{8} \times \cancel{2}} = -\frac{3}{5}$$

Remarque 2: Si $b=1$ alors la formule devient $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$

Exemple: $9 \times \frac{4}{-7} = \frac{9 \times 4}{-7} = \frac{36}{-7}$

2) division de 2 quotients

a) inverse d'un nombre non nul

Définition:

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Propriétés

- Tout nombre x non nul admet un inverse (noté x^{-1}) qui est le nombre $\frac{1}{x}$
- Tout nombre en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) admet un inverse qui est le nombre $\frac{b}{a}$.

Remarques:

- un nombre et son inverse ont toujours le même signe. En effet leur produit 1 est positif et seul le produit de deux nombres de même signe est positif.
- zéro est le seul nombre qui n'a pas d'inverse. En effet, tout nombre multiplié par 0 donne 0 et ne donnera jamais 1!

Exemples: a) Donner l'inverse de 3.

b) Donner l'inverse de $\frac{-7}{3}$

a) L'inverse de 3 est $3^{-1} = \frac{1}{3}$

b) L'inverse de $\frac{-7}{3} = \left(\frac{-7}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{-7}{3}} = \frac{3}{-7} = \frac{-3}{7}$