Chapitre 3 : nombres en écriture fractionnaire

I Comparaison de quotients

1) Transformer, simplifier une écriture fractionnaire :

Règle : Si on multiplie ou si on divise le numérateur et le dénominateur d'un quotient par un même nombre non nul alors on obtient un quotient égal :

pour tous nombres a, b et k tels que b et k sont différents de zéro $\dfrac{a \times k}{b \times k} = \dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{a \div k}{b \div k} = \dfrac{a}{b}$

Exemple 1 : Simplifie le quotient $\dfrac{42}{140}$

on cherche les facteurs communs à 42 et 140 : $\dfrac{42}{140} = \dfrac{3 \times \cancel{2} \times \cancel{7}}{10 \times \cancel{7} \times \cancel{2}}$

on peut simplifier le quotient : $\dfrac{42}{140} = \dfrac{3}{10}$

<u>Exemple 2</u> : Détermine le nombre manquant dans l'égalité $\frac{1,2}{6} = \frac{\dots}{18}$

Pour passer de 6 à 18, on multiplie par 3 au dénominateur

Donc pour trouver le nombre manquant au numérateur, on multiplie 1,2 par 3 ce qui donne 3,6.

$$\frac{1,2}{6} = \frac{1,2 \times 3}{18} = \frac{3,6}{18}$$

2) Rappels sur les critères de divisibilité

Rappel n°1 : Soient a et b deux nombres entiers positifs.
Lorsque le reste de la division de a par b est égal à zéro,
on dit que a est un **multiple** de b, ou que b est un **diviseur** de a, ou encore que a est **divisible** par b.
Par exemple :
- 15 est un **multiple** de 3, car $15 = 3 \times 5$

Autrement dit, 3 est un **diviseur** de 15, ou encore 15 est **divisible** par 3.
- 17 n'est pas un multiple de 3, car $17 = 3 \times 5 + 2$

EXERCICE 1

1. 12 est-il un diviseur de 6 ? non c'est 6 qui est un diviseur de 12 car on peut faire $12 \div 6 = 2$
2. 124 est-il divisible par 4 ? oui car le reste de la division de 124 par 4 est égal à zéro
3. 38 est-il un multiple de 5 ? non car $38 = 5 \times 7 + 3$
4. Citer cinq multiples du nombre 12. On les trouve dans la table de 12 : 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60
5. Citer cinq diviseurs du nombre 12. 12 est divisible par 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 : ce sont tous ses diviseurs
6. Déterminer tous les diviseurs du nombre 30. 30 est un multiple de 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30
7. Déterminer un nombre qui soit à la fois multiple de 2, de 5 et de 7. $2 \times 5 \times 7 = 70$

Rappel n°2 : Critères de divisibilité

- Un nombre sera **divisible par 2** si le chiffre des unités est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8
- Un nombre sera **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre sera **divisible par 4** si la moitié est paire ou encore si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.
- Un nombre sera **divisible par 5** s'il se termine par 0 ou 5
- Un nombre sera **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un nombre sera **divisible par 10** s'il se termine par 0.

EXERCICE 2

Parmi les nombres suivants :

1 125	6 354	8 940	917	1 308	51 225	111 111

préciser :

- lesquels sont divisibles par 2 : 6354 ; 8940 ; 1308
- lesquels sont divisibles par 3 $1+1+2+5=9$ donc 1125 est divisible par 3 ; de même 6354 ; 8940 ; 1308 ; 51225 ; 111 111
- lesquels sont divisibles par 4 : 8940 ; 1308 ;
- lesquels sont divisibles par 5 : 1125 ; 8940 ; 51225
- lesquels sont divisibles par 9 : 1125 ; 6354 ;

Montrer que le nombre qui reste est divisible par 7 : 917 est divisible par 7 car on peut écrire $917 = 700 + 210 + 7$

$= 7 \times 100 + 7 \times 30 + 7 \times 1$

$= 7 \times (100 + 30 + 1)$

$= 7 \times 131$

Critère de divisibilité par 7 :

Méthode : on sépare le dernier chiffre

- on multiplie le dernier chiffre par 2
- puis on soustrait le résultat de la partie du nombre qui reste
- Si le résultat obtenu est divisible par 7 alors le nombre étudié était divisible par 7

Exemple : 371 est-il divisible par 7 ?

371

$1 \times 2 = 2$

$37 - 2 = 35$ donc 371 est divisible par 7.

3) Méthodes pour comparer des fractions :

Méthode 1 : Pour comparer des nombres en écriture fractionnaire, on les écrit avec le même dénominateur puis on les range dans le même ordre que leurs numérateurs.

Exemple : range dans l'ordre croissant les nombres suivants

$A = \frac{1,2}{4}$ $B = \frac{5,7}{20}$ $C = \frac{3,1}{10}$ $D = \frac{1,7}{5}$ $E = \frac{5,9}{20}$

Exemple : range dans l'ordre croissant les nombres suivants

$A = \frac{1,2}{4}$ $B = \frac{5,7}{20}$ $C = \frac{3,1}{10}$ $D = \frac{1,7}{5}$ $E = \frac{5,9}{20}$

En 5e le dénominateur commun sera toujours le plus grand dénominateur.

- on écrit toutes les fractions avec un dénominateur égal à 20

$A = \frac{1,2}{4} = \frac{1,2 \times 5}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$; $C = \frac{3,1}{10} = \frac{3,1 \times 2}{10 \times 2} = \frac{6,2}{20}$; $D = \frac{1,7}{5} = \frac{1,7 \times 4}{5 \times 4} = \frac{6,8}{20}$

- on range les fractions dans le même ordre que leurs numérateurs :

$\frac{5,7}{20} < \frac{5,9}{20} < \frac{6}{20} < \frac{6,2}{20} < \frac{6,8}{20}$ on a donc $B < E < A < C < D$

- on en déduit que $\frac{5,7}{20} < \frac{5,9}{20} < \frac{1,2}{4} < \frac{3,1}{10} < \frac{1,7}{5}$

Application : Exercices n° 8 ; 9 ; 10 page 12

Méthode 2 : Comparaison à l'unité

Si le numérateur d'un nombre en écriture fractionnaire est supérieur à son dénominateur alors le nombre est supérieur à 1.

Si le numérateur est inférieur au dénominateur alors le quotient est inférieur à 1.

Exemple : $\frac{123}{524} < 1$ car $123 < 524$

$\frac{627}{112} > 1$ car $627 > 112$

on peut donc en déduire que $\frac{123}{524} < \frac{627}{112}$

Méthode 3 : Si deux nombres en écriture fractionnaire ont le même numérateur alors ils sont rangés dans l'ordre inverse de leurs dénominateurs

Exemple : Compare $\frac{8}{18}$ et $\frac{8}{19}$

En effet, on confectionne 2 gâteaux identiques nommés gâteau A et gâteau B que l'on partage respectivement en 18 parts et 19 parts. On prend le même nombre de parts de chaque gâteau mais les parts de gâteau A sont plus grosses.

$\frac{8}{18} > \frac{8}{19}$

II Addition ou soustraction de fractions :

1) Lorsque les dénominateurs sont les mêmes :

Règle : Pour additionner (ou soustraire) des nombres en écriture fractionnaire ayant le même dénominateur, on garde le dénominateur commun et on additionne (ou soustrait) les numérateurs.

Exemples : Calcule $A = \frac{7}{3} + \frac{6}{3}$

$A = \frac{7+6}{3}$

$A = \frac{13}{3}$

$B = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}$

$B = \frac{9-3}{4}$

$B = \frac{6}{4}$: on peut simplifier en utilisant les critères de divisibilité

$B = \frac{3 \times \cancel{2}}{2 \times \cancel{2}}$ $B = \frac{3}{2}$

Remarque : $\frac{3}{2}$ est une fraction irréductible : on ne peut pas la simplifier.
3 et 2 sont dits premiers entre eux : ils n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exercices d'application :

4 Complète les calculs suivants en utilisant la règle d'addition ou de soustraction.

a. $\frac{5}{9}+\frac{3}{9} = \frac{5+3}{9} = \frac{8}{9}$

b. $\frac{3}{7}-\frac{1}{7} = \frac{3-1}{7} = \frac{2}{7}$

c. $\frac{3}{14}+\frac{1}{14}+\frac{5}{14} = \frac{3+1+5}{14} = \frac{9}{14}$

d. $\frac{6}{17}+\frac{4}{17} = \frac{6+4}{17} = \frac{10}{17}$

5 Calcule mentalement.

a. $\frac{4}{9}+\frac{3}{9}=\frac{7}{9}$

b. $\frac{43}{78}+\frac{28}{78}=\frac{71}{78}$

c. $\frac{13}{17}-\frac{2}{17}=\frac{11}{17}$

d. $\frac{91}{121}-\frac{90}{121}=\frac{1}{121}$

e. $\frac{101}{4}+\frac{26}{4}=\frac{127}{4}$

f. $\frac{12}{12}-\frac{12}{12}=\frac{0}{12}=0$

6 Calcule puis, si c'est possible, simplifie !

a. $\frac{1}{6}+\frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2\times 2}{2\times 3} = \frac{2}{3}$

b. $\frac{31}{14}-\frac{5}{14} = \frac{26}{14} = \frac{13\times 2}{7\times 2} = \frac{13}{7}$

c. $\frac{25}{33}+\frac{19}{33} = \frac{44}{33} = \frac{4\times 11}{3\times 11} = \frac{4}{3}$

d. $\frac{17}{18}+\frac{19}{18} = \frac{36}{18} = \frac{18\times 2}{18\times 1} = \frac{2}{1} = 2$

e. $\frac{15}{37}+\frac{22}{37} = \frac{37}{37} = 1$

f. $\frac{45}{143}+\frac{20}{143} = \frac{65}{143} = \frac{13\times 5}{13\times 11} = \frac{5}{11}$

g. $\frac{1}{27}+\frac{4}{27}+\frac{7}{27} = \frac{12}{27} = \frac{4\times 3}{9\times 3} = \frac{4}{9}$

h. $\frac{16}{28}-\frac{7}{28}-\frac{5}{28} = \frac{9}{28}-\frac{5}{28} = \frac{4}{28} = \frac{\cancel{4}\times 1}{\cancel{4}\times 7} = \frac{1}{7}$

i. $\frac{13}{19}-\frac{5}{19}+\frac{6}{19} = \frac{8}{19}+\frac{6}{19} = \frac{14}{19}$

2) Lorsque les dénominateurs sont différents

Règle : Si les nombres en écriture fractionnaire n'ont pas le même dénominateur, alors pour les additionner (ou les soustraire), il faut les mettre au même dénominateur.

Exemple : Calcule $C = \frac{7}{3} + \frac{6}{12}$

on écrit les fractions avec le même dénominateur :

$$C = \frac{7 \times 4}{3 \times 4} + \frac{6}{12}$$

Le dénominateur commun est 12.

$$C = \frac{28}{12} + \frac{6}{12}$$

$$C = \frac{28+6}{12}$$

$$C = \frac{34}{12}$$

$$C = \frac{\cancel{2} \times 17}{\cancel{2} \times 6} = \frac{17}{6}$$

on a simplifié pour obtenir une fraction irréductible

Application :

8 Réduis au même dénominateur puis calcule.

$A = \frac{7}{6} + \frac{2}{3}$

$A = \frac{7}{6} + \frac{2 \times \ldots}{3 \times \ldots}$

$A = \frac{7}{6} + \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

$A = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

$B = \frac{3}{5} + \frac{11}{10}$

$B = \frac{3 \times \ldots}{5 \times \ldots} + \frac{11}{10}$

$B = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} + \frac{11}{10}$

$B = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

$C = \frac{8}{9} - \frac{1}{3}$

C = ...

C = ...

C = ...

$D = 5 + \frac{3}{2}$

D = ...

D = ...

D = ...

$E = 3 - \frac{5}{7}$

E = ...

E = ...

E = ...

$F = \frac{7}{5} + 1$

F = ...

F = ...

F = ...

$G = \frac{13}{12} + \frac{19}{48}$

G = ...

G = ...

G = ...

$H = \frac{17}{13} - \frac{11}{65}$

H = ...

H = ...

H = ...